Valdete dos Santos Coqueiro • Mariana Moran • Karina Dezilio • Suzana Domingues da Silva • Valdir Alves

MANUAL DIDÁTICO PARA O USO DOS MATERIAIS DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA

DO PROGRAMA BRASIL PROFISSIONALIZADO

MANUAL DIDÁTICO PARA O USO DOS MATERIAIS DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA DO PROGRAMA BRASIL PROFISSIONALIZADO

Kit de Probabilidade, Torre de Hanói, Kit Teorema de Pitágoras, Kit Relações Métricas no Triângulo Retângulo, Kit Produtos Notáveis e Teodolito Ótico

Diagramação/Capa

Oxy Creative

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

M294 Manual didático para o uso dos materiais do laboratório de matemática do Programa Brasil Profissionalizado [recurso eletrônico] : kit de probabilidade, torre de Hanói, kit teorema de Pitágoras, kit relações métricas no triângulo retângulo, kit produtos notáveis e Teodolito ótico / Valdete dos Santos Coqueiro ... [et al.]- Campo Mourão, PR: Unespar, 2017.

Autoria de Valdete dos Santos Coqueiro, Mariana Moran, Karina Dezilio, Suzana Domingues da Silva, Valdir Alves.
Modo de acesso: World Wide Web.

ISBN 978-85-88753-46-4

1. Matemática – Formação de professores. 2. Educação matemática – Laboratório de ensino de matemática. 3. Jogos no ensino da matemática. I. Coqueiro, Valdete dos Santos. II. Título.

CDD 23.ed. 510

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este Manual Didático foi elaborado pelos professores Mariana Moran, Valdete dos Santos Coqueiro e Valdir Alves e pelas acadêmicas Karina Dezilio e Suzana Domingues da Silva, do Colegiado de Matemática da UNESPAR –Campus de Campo Mourão.

Com ele, temos por objetivo oferecer subsídios práticos, teóricos e metodológicos a professores da Educação Básica a respeito do uso e da exploração de alguns dos materiais didáticos que compõem o Laboratório de Matemática, implantado em algumas escolas técnicas e profissionalizantes, disponibilizado pelo Programa Brasil Profissionalizado, criado em 2007, pelo Governo Federal. Tal necessidade surgiu devido ao contato de alguns professores de um Colégio Estadual de Campo Mourão com professores do Colegiado de Matemática da UNESPAR, solicitando o auxílio no uso dos materiais, já que o Laboratório havia sido implantado na escola e não estava sendo usado devido a falta de conhecimento. Sendo assim, os autores desse trabalho se dedicaram a estudar cada material e investigar a melhor forma de aproveitamento destes, de modo a oferecer uma capacitação para professores de Matemática da Educação Básica preparando-os para explorar os materiais em sala de aula, a fim de proporcionar a construção de conhecimentos matemáticos com seus alunos. Dessa investigação, surgiu a ideia de confeccionar este manual didático em trabalho conjunto com acadêmicas do curso de Matemática, no decorrer do desenvolvimento de uma Pesquisa de Iniciação Científica – PIC, na UNESPAR, em Campo Mourão.

O Manual Didático elaborado aborda explicações dos seguintes materiais que compõem o Laboratório de Matemática: Kit de Probabilidade, Torre de Hanói, Kit Teorema de Pitágoras, Kit Relações Métricas no Triângulo Retângulo, Kit Produtos Notáveis e Teodolito Ótico. Tal manual é composto por um roteiro seguindo as seguintes diretrizes para cada material didático: apresentação do material; descrição; objetivos; conteúdos estruturantes; conteúdos básicos; ano e nível sugeridos; cuidados necessários; desenvolvimento da atividade; potencialidades e limitações.

Espera-se que este material possa auxiliar os professores e futuros professores com relação ao uso dos materiais didáticos do Laboratório de Matemática, bem como contribuir com os processos de ensino e aprendizagem dos alunos. Também espera-se que o manual possa servir de apoio para escolas que não possuem o Laboratório, uma vez que serão sugeridas formas de construção de alguns dos materiais.

Esse trabalho contou com as correções e a leitura minuciosa do professor Fábio Alexandre Borges, professor do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná *Campus* de Campo Mourão.

Figura 1.1: Kit de Probabilidade
Fonte: Autores

1.1 APRESENTAÇÃO

A palavra probabilidade deriva do latim probare, que significa testar, provar. Ela é utilizada em circunstâncias nas quais não temos a certeza de que algo irá ocorrer e são associadas chances a cada ocorrência possível. Para tanto, trabalharemos com o Kit de Probabilidade do Laboratório de Matemática como meio de resolver tais fenômenos aleatórios. Da mesma forma, apontaremos outros conteúdos, tal como a Análise Combinatória, e que podem ser trabalhados por meio deste material.

1.2 DESCRIÇÃO

O Kit de Probabilidade contém:

- 40 bolas coloridas: 20 bolas vermelhas; 15 bolas verdes; 5 bolas azuis e uma branca.
- 40 bolas numeradas de 1 a 40.
- 4 conjuntos de fichas numeradas de 1 a 10: 1 conjunto vermelho; 1 conjunto azul; conjunto verde; 1 conjunto amarelo.
- 10 dados: 2 cubos; 2 tetraedro; 2 trapezóide pentagonal, 2 dodecaedro; 2 icosaedro.

Tetraedro		Tetraedro é um sólido que possui quatro faces, das quais cada face tem três números de 1 a 3, onde a leitura é feita de acordo com os três lados visíveis, do número na posição vertical.
Cubo		Um cubo é uma dado comum, contendo seis faces numeradas de 1 a 6.
Dodecaedro		Dodecaedro é um dado de doze faces, numeradas de 1 a 12 e sua leitura é feita de acordo com a face que está voltada para cima.
Trapezóide Pentagonal		Trapezóide pentagonal contém dez faces, geralmente de zero a nove, sua leitura é feita de acordo com a face que está voltada para cima.
Icosaedro		Icosaedro contém vinte faces numeradas de 1 a 20 e sua leitura é feita de acordo com a face que está voltada para cima.

Tabela 1.1: Tabela dos dados
Fonte: Autores

Figura 1.2: Moedas
Fonte: Autores

- Duas moedas (cara e coroa).

- Doze moedas: Duas de R$ 1,00; Duas de R$ 0,50; Duas de R$ 0,25; Duas de R$ 0,10; Duas de R$ 0,05; Duas de R$ 0,01.

- **6 roletas:** 4 coloridas (uma com 8 divisões iguais, numeradas de 1 a 8, uma com 6 divisões iguais, uma com 4 divisões iguais e uma com 3 divisões, sendo que duas delas são iguais); 2 transparentes (uma com 8 divisões iguais e uma com 12 divisões iguais).

- 1 saco vermelho

Figura 1.3: Roletas coloridas
Fonte: Autores

Figura 1.4: Roletas transparentes
Fonte: Autores

1.3 OBJETIVOS

Testar e validar os conteúdos básicos de Probabilidade e Análise Combinatória.

1.4 CONTEÚDO ESTRUTURANTE

Tratamento da Informação.

1.5 CONTEÚDOS BÁSICOS

Estudos e Noções de Probabilidade e Análise Combinatória.

1.6 NÍVEL DE ENSINO SUGERIDO

A partir do 9º ano.

1.7 DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

Em todas as tarefas, para verificar que o resultado da probabilidade ou combinação aconteça, deve-se fazer o teste várias vezes, pois quanto maior o número de testes, maior será a aproximação do resultado esperado. Para isso, sugerimos: que o professor divide a sala em pequenos grupos, peça para fazerem uma mesma quantidade de teste e anotarem a resposta a cada jogada; ao terminar os testes, o professor se dirige até a lousa, anota os resultados de cada grupo e faz uma média aritmética dos resultados. A resposta dessa média será o resultado esperado ou chegará muito próximo dele.

Também aconselhamos que este material seja utilizado para introduzir o conteúdo de Probabilidade e Análise Combinatória. Seguem algumas sugestões de atividades para serem desenvolvidas. Observamos que tal resolução é uma formalização das ideias obtidas por meio das tentativas com o material Kit de Probabilidade.

PROBABILIDADE

Atividade 1: Em um saco há 40 bolinhas numeradas de 1 a 40. Qual a probabilidade de sair um número ímpar.

Solução: Neste exercício, os alunos deverá repor as bolinhas no saco.

O espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6,..., 40\}$, o conjunto dos elementos ímpares é $A = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11,..., 39\}$ e $n(\Omega)$ e $n(A)$ são suas respectivas cardinalidades dos conjuntos Ω e A. Queremos saber a probabilidade do evento A ocorrer. Logo a probabilidade de sair um número ímpar é $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$.

Atividade 2: Num saco há 5 moedas: 1 de um real, 1 de cinquenta centavos, 1 de vinte e cinco centavos, 1 de dez centavos e 1 de cinco centavos. Uma moeda é escolhida ao acaso, ache a probabilidade de que:

a) Ela não seja de um real;

Solução: Neste exercício, os alunos deverão repor as moedas no saco.

O espaço amostral é o conjunto Ω = { 1; 0,5; 0,25; 0,1; 0,05}, o conjunto dos elementos das moedas que não é de um real é A = {0,5; 0,25; 0,1; 0,05} e $n(\Omega)$ e $n(A)$ são suas respectivas cardinalidades dos conjuntos Ω e A. Queremos saber $P(A)$, ou seja, a probabilidade do evento A ocorrer. Logo a probabilidade de sair uma moeda que não seja de um real é $PA = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{5}$.

b) Ela não tenha um valor menor que cinquenta centavos.

Solução: Neste exercício, os alunos deverão repor as moedas no saco.

O espaço amostral é o conjunto Ω={ 1; 0,5; 0,25; 0,1; 0,05}, o conjunto dos elementos das moedas que não tenha um valor menor que cinquenta centavos é A={ 1; 0,5} e $n(\Omega)$ e $n(A)$ são suas respectivas cardinalidades dos conjuntos Ω e A. Queremos saber $P(A)$, ou seja, a probabilidade do evento A ocorrer. Logo a probabilidade de que, ao retirar a moeda do saco, não seja menor que cinquenta centavos é $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{5}$.

Atividade 3: Um dado de doze faces (dodecaedro) é lançado. Pergunta-se a probabilidade dos eventos abaixo acorrerem:

a) Sair um número par.

Solução: O espaço amostral é o conjunto Ω={ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, o conjunto dos elementos pares é A={ 2, 4, 6, 8, 10, 12} e $n(\Omega)$ e $n(A)$ são suas respectivas cardinalidades dos conjuntos Ω e A. Queremos saber $P(A)$, ou seja, a probabilidade do evento A ocorrer. Logo a probabilidade de sair um número par é $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

b) Sair um número menor que 9.

Solução: O espaço amostral é o conjunto Ω={ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, o conjunto dos elementos menores que 9 é A={ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} e $n(\Omega)$ e $n(A)$ são suas respectivas cardinalidades dos conjuntos Ω e A. Queremos saber $P(A)$, ou seja, a probabilidade do evento A ocorrer. Logo a probabilidade de sair um número menor que nove é
$PA = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Atividade 4: Observe a roleta da Figura 1.5.
O ponteiro gira podendo parar em qualquer cor.

Figura 1.5: Roleta colorida
Fonte: Autores

a) Qual a probabilidade de sair a cor verde?

Solução: Podemos observar que a cor amarela, equivale a metade da roleta, e as cores verde e vermelho corresponde a um quarto. Assim, o espaço amostral é o conjunto Ω={verde, vermelho, amarelo, amarelo}, o conjunto da cor verde é V={verde} e $n(\Omega)$ e $n(V)$ são suas respectivas cardinalidades dos conjuntos Ω e A. Queremos saber $P(V)$. Portanto a probabilidade de sair a cor verde é $P(V) = \frac{n(v)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4}$.

b) Qual a probabilidade de sair a cor amarela?

Solução: Podemos observar que a cor amarela, equivale a metade da roleta, e as cores verde e vermelho corresponde a um quarto. Assim, o espaço amostral é o conjunto Ω={verde, vermelho, amarelo, amarelo}, o conjunto da cor amarelo é A={amarelo, amarelo} e $n(\Omega)$ e $n(A)$ são suas respectivas cardinalidades dos conjuntos Ω e A. Queremos saber $P(A)$. Portanto a probabilidade de sair a cor amarelo é $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

c) Qual a probabilidade de sair a cor vermelho?

Solução: Podemos observar que a cor amarela, equivale a metade da roleta, e as cores verde e vermelho corresponde a um quarto. Assim, o espaço amostral é o conjunto Ω={verde, vermelho, amarelo, amarelo}, o conjunto da cor vermelha é B={vermelho} e $n(\Omega)$ e $n(B)$ são suas respectivas cardinalidades dos conjuntos Ω e B. Queremos saber $P(B)$. Portanto a probabilidade de sair a cor vermelho $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4}$.

Atividade 5: Duas moedas são lançadas simultaneamente. Qual a probabilidade de saírem exatamente duas caras?

Solução: C = cara; K = coroa.

O espaço amostral é o conjunto Ω ={(C,C),(C,K),(K,C),(K,K)}, o conjunto das moedas serem exatamente duas caras é A={(C,C)} e $n(\Omega)$ e $n(A)$ são suas respectivas cardinalidades dos conjuntos Ω e A. Queremos saber $P(A)$, ou seja, a probabilidade do evento A ocorrer. Logo a probabilidade de sair exatamente duas caras é $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4}$.

Atividade 6: Considere uma roleta com oito divisões iguais, numeradas de 1 a 8, e um saco contendo sete bolinhas vermelhas e três bolinhas verdes.

a) Qual a probabilidade de sair um número par?

Solução: O espaço amostral é o conjunto Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, o conjunto dos elementos pares na roleta é A={2, 4, 6, 8} e $n(\Omega)$ e $n(A)$ são suas respectivas cardinalidades dos conjuntos Ω e A. Queremos saber $P(A)$, ou seja, a probabilidade do evento A ocorrer. Logo a probabilidade de sair um número par é $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

b) Qual a probabilidade de sair uma bolinha verde?

Solução: Neste exercício, os alunos terá que repor as bolinhas no saco.

O espaço amostral é o conjunto Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, o conjunto das bolinhas verdes é B={1, 2, 3} e $n(\Omega)$ e $n(B)$ são suas respectivas cardinalidades dos conjuntos Ω e B. Queremos saber $P(B)$, ou seja, a probabilidade do evento B ocorrer. Logo a probabilidade de sair uma bolinha verde é $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{10}$.

c) Para ganhar um prêmio o jogador terá que, além de rodar a roleta e cair em um número par, tirar uma bolinha verde. Deste modo, qual a probabilidade do jogador ganhar um prêmio?

Solução: O evento A é dado pela probalilidade de sair um número par, descrito no item (a), sendo $P(A)=1/2$. O evento B é dado pela probabilidade de sair uma bolinha verde, descrito no item (b), sendo $P(B) = \frac{3}{10}$.

Por fim, a probabilidade de o jogador ganhar um prêmio é

$$P\ (A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{20}.$$

Atividade 7: Num saco há cartões numerados de 1 a 5. Retirando-se dois cartões, sucessivamente, sem reposição, determine a probabilidade de que dois números retirados sejam ímpares.

Solução: O espaço amostral é o conjunto Ω={1, 2, 3, 4, 5}, o conjunto dos números ímpares é A={1, 3, 5} e $n(\Omega)$ e $n(A)$ são suas respectivas cardinalidades dos conjuntos Ω e A. Queremos saber $P(A)$, em duas retiradas sem reposições. Na primeira retirada a probabilidade de sair um número ímpar é $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{5}$.

A segunda retirada é condicionada à primeira, assim restaram dois cartões ímpares, de quatro cartões. Logo a probabilidade $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Logo a probabilidade de sair dois cartões ímpares é a intersecção entre dois eventos, ou seja, $P\ (A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$.

Atividade 8: Sabendo que em um saco contém 40 bolas numeradas de 1 a 40, qual é a probabilidade de que em 3 retiradas, sem reposição, sejam de número par?

Solução: O espaço amostral é o conjunto Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6,..., 40}, o conjunto dos elementos pares é A={2, 4, 6, 8, 10, 12,..., 40} e $n(\Omega)$ e $n(A)$ são suas respectivas cardinalidades dos conjuntos Ω e A. Queremos saber $P(A)$ em três retiradas sem reposição. Na primeira retirada a probabilidade de sair um número par é

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}.$$

A segunda retirada é condicionada à primeira, assim restaram 19 bolas pares de 39. Logo a probabilidade de sair um número par na segunda retirada é

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{19}{39}.$$

A terceira retirada é condicionada à segunda, assim restaram 18 bolas pares de 38. Logo a probabilidade de sair um número par na terceira retirada é

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{18}{38} = \frac{9}{19}.$$

Por fim, a probabilidade de que em 3 retiradas, sem reposição, sejam de número par, será a intersecção entre os eventos ocorridos em cada retirada, ou seja, a probabilidade do evento A sair, inter a probabilidade do evento B sair, inter a probabilidade do evento C.

Logo a probbilidade de sair três bolas pares é

$$P\,(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{19}{39} \times \frac{9}{19} = \frac{3}{26}.$$

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Atividade 1: Uma moeda tem duas faces: cara (K) e coroa (C). Lança-se uma moeda três vezes seguidas e observa-se qual face ficou voltada para cima. Quantos e quais são os resultados possíveis?

Solução: O espaço amostral é o conjunto Ω={(C,C,C),(C,C,K),(C,K,C),(C,K,K),(K,K,K),(K,K,C),(K,C,C),(K,C,C)}, sendo assim, há 8 possíveis resultados.

Atividade 2: Tenho três moedas, uma de um real, uma de cinquenta centavos e uma de vinte e cinco centavos, como mostra a Figura 1.6. De quantas maneiras essas moedas podem ser dispostas?

Figura 1.6: Moedas coloridas
Fonte: Autores

Solução: As moedas podem ser disposta 3! = 3×2×1 = 6.

Atividade 3: Um saco contém 4 bolas verdes e 3 bolas azuis. Quantas são as maneiras de retirar:

a) 2 bolas?

Solução: São 7 bolas ao total, e queremos saber de quantas maneiras diferentes podemos retirar 2 bolas do saco. Utilizando a fórmula $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, temos a combinação $C_{7,2} = \frac{7!}{2!(7-2)!}$ = 21 . Portanto há 21 maneiras diferentes.

b) 1 bola azul e 3 verdes?

Solução: Temos 3 bolas azuis e queremos retirar 1 bola azul de modo a combinar com a retirada de 3 bolas verdes, das quais temos 4 ao total. Utilizando a fórmula

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ temos } C_{3,1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3 \text{ e } C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$

Portanto há $C_{3,1} \times C_{4,3} = 12$ maneiras.

1.8 POTENCIALIDADES

Por meio desse material podem ser trabalhados conteúdos de Probabilidade como: Probabilidade de um evento em um espaço amostral finito, Probabilidade com reunião e intersecção de eventos, Probabilidade condicional e experimentos não equiprováveis. Os conteúdos de Análise Combinatória que podem ser trabalhados são: contagem, combinações simples e permutações.

1.9 LIMITAÇÕES

Nos exercícios que utilizam as roletas, além da influência do atrito, há possibilidade que a roleta vicie devido a força aplicada sobre ela. Outra limitação a ser destacada, é em relação aos exercícios que utilizam moedas, pois, por serem de tamanhos diferentes, provavelmente o aluno poderá manipular as jogadas, pegando a moeda conveniente para o exercício que lhe foi estipulado, mesmo que estas estejam ocultas visualmente.

Como foi dito anteriormente, para verificar que o resultado de tal Probabilidade ou Combinação aconteça, deve-se fazer o teste várias vezes até se aproximar de uma conclusão confiável.

Figura 2.1: Torre de Hanói
Fonte: Autores

2.1 APRESENTAÇÃO

A Torre de Hanói é um quebra-cabeça constituído por uma base contendo três hastes e discos de diâmetros diferentes com uma perfuração no centro de cada disco. O objetivo desse jogo é transferir todos os discos de uma haste para outra, sendo que só é permitido movimentar um disco de cada vez e de modo a não colocar um disco maior sobre um disco menor. Vence o jogo quem conseguir transportar todos os discos de uma haste para outra no menor número de movimentos possível.

Segundo Manoel (s/d), a Torre de Hanói, também conhecida por torre de bramanismo ou quebra-cabeças do fim do mundo, foi criado pelo matemático francês Edouard Lucas e vendido como brinquedo em 1983. Para criar esse brinquedo, Lucas tomou como base a antiga lenda Hindu, a qual falava de um templo em Benares, cidade santa da Índia, onde existia uma torre sagrada do bramanismo, cuja função era melhorar a disciplina mental dos jovens monges. De acordo com a lenda, no grande templo de Benares, debaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há uma placa de bronze sobre a qual estão fixadas três hastes de diamante. Em uma dessas hastes, o deus Brama, no momento da criação do mundo, colocou 64 discos de ouro puro. E assim disse aos monges para transferirem a pilha de discos de uma haste para outra, movendo um disco de cada vez e nunca permitindo que um disco maior fique acima de um menor. Assim, quando os monges terminassem o trabalho, o templo seria transformado em pó e o mundo acabaria.

A quantidade mínima de movimentos para transferir todos os discos de uma haste para outra pode ser escrito por meio da seguinte relação: $M_n = 2^n - 1$, em que M é o número de movimentos e n é o número de discos, ou seja, existe uma relação de dependência entre o número mínimo de movimentos e o total de hastes disponíveis. A demonstração por indução finita para esta relação pode ser encontrada em Watanabe (1986).

Tal relação também pode ser obtida por meio de uma Progressão Geométrica. Observe que a PG é 2^{n-1} tipo . Assim, a sequência de números somados forma a PG é: (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,...) de $q = 2$ e $a_1 = 1$. Logo, a quantidade mínima de movimentos é igual a soma dos termos dessa PG. Dessa forma, temos que:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_n = 1 \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$S_n = 2^n - 1$$

2.2 DESCRIÇÃO

O material didático Torre de Hanói é constituído com uma base contendo três hastes e dez discos de diâmetros diferentes.

2.3 OBJETIVOS

Desenvolver o raciocínio lógico e indutivo dos jogadores a partir de estratégias tomadas por cada um, bem como auxiliá-los na atribuição de significado para a função exponencial.

2.4 CONTEÚDOS ESTRUTURANTES

No Ensino Fundamental os conteúdos estruturantes são Números e Álgebra. No Ensino Médio pode-se explorar o conteúdo de Funções.

2.5 CONTEÚDOS BÁSICOS

Potenciação no Ensino Fundamental, Funções e Progressão Geométrica no Ensino Médio.

2.6 NÍVEL DE ENSINO SUGERIDO

Todos os anos escolares da Educação Básica, desde que se respeite as limitações para cada nível.

2.7 DESENVOLVIMENTO DE ATIVIDADE

Seguem algumas estratégias sugeridas por Manoel (s/d) para auxiliar o professor no desenvolvimento de atividades a serem realizadas com a Torre de Hanói:

Primeiro comece falando para os alunos quem foi o criador do jogo e a respeito da lenda indiana sobre a torre.

Deixe os alunos em contato com o material para que se familiarizem com as peças, e brinquem livremente.

Introduza as regras do jogo para os alunos.

Atividade 1: Jogar com apenas 1 disco, 2 discos e aumentar o número de discos até 5 e anotar a quantidade de movimentos que você realizou na Tabela 2.1.

Número de discos	Quantidade de movimentos
1	
2	
3	
4	
5	

Tabela 2.1: Quantidade de movimentos
Fonte: Autores

Assim que terminarem de preencher a Tabela 2.1, questione os alunos sobre a quantidade de movimentos que eles realizaram, afim de verificar se todos realizaram a mesma quantidade de movimentos. Questione se a quantidade de movimentos no qual eles realizaram é a mínima e caso não seja, peça que ele investigue e descubra a melhor forma de movimentar os discos e conseguir o número mínimo de movimentos e anote seus resultados na Tabela 2.2.

Atividade 2: O objetivo do jogo Torre da Hanói é movimentar os discos de uma haste para a outra utilizando o menor número possível de movimentos. Jogue novamente e tente encontrar essa quantidade mínima.

Número de discos	Quantidade mínima de movimentos
1	
2	
3	
4	
5	

Tabela 2.2: Quantidade mínima de movimentos
Fonte: Autores

Após eles preencheram a Tabela 2.2, faça o seguinte questionamento: que estratégia você utilizou para obter o número mínimo de movimentos dos discos?

Atividade 3: Sabendo a quantidade mínima de movimentos para o número de discos um, dois, três, quatro e cinco, sem utilizar o material, encontre o número mínimo de movimentos para seis, sete e oito discos. Qual procedimento você utilizou para encontrar? Anote todo o procedimento utilizado e os resultados na Tabela 2.3.

Número de discos	Quantidade mínima de movimentos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Tabela 2.3: Quantidade mínima de movimentos
Fonte: Autores

Atividade 4: A cada disco que é acrescentado, em quanto está aumentando o número de movimentos?

Atividade 5: Tente encontrar um modelo matemático que expresse essa quantidade mínima de movimentos conforme o número de discos.

2.8 POTENCIALIDADES

A Torre de Hanói pode ser trabalhada em todos os anos escolares da Educação Básica, desde que se respeite os objetivos de cada nível. Na Pré-Escola, pode ser trabalhada da seguinte forma: separar as cores e tamanhos dos discos, em ordem crescente e decrescente, propiciando o desenvolvimento da coordenação motora e a identificação das formas. Já no Ensino Fundamental II, propicia ao aluno compreender as Potências de base 2, o processo de construção da linguagem matemática, o conceito de variáveis e o reconhecimento das potências como multiplicação de mesmo fator e a Radiciação como sua operação inversa. No Ensino Médio, proporciona ao aluno o entendimento do conceito de Sequência Numérica, Progressão Geométrica e Funções Exponenciais. Além desses conceitos matemáticos, a Torre de Hanói pode desenvolver o raciocínio lógico, indutivo e cognitivo dos jogadores a partir de estratégias tomadas por eles.

2.9 LIMITAÇÕES

Na utilização da Torre de Hanói, uma limitação é que a quantidade de discos a serem utilizadas é limitada. Sendo assim, ao explorar o material, o aluno terá acesso a um número máximo de discos necessitando fazer uma generalização para que obtenha a quantidade mínima de movimentos quando o número de discos for maior do que o disponível.

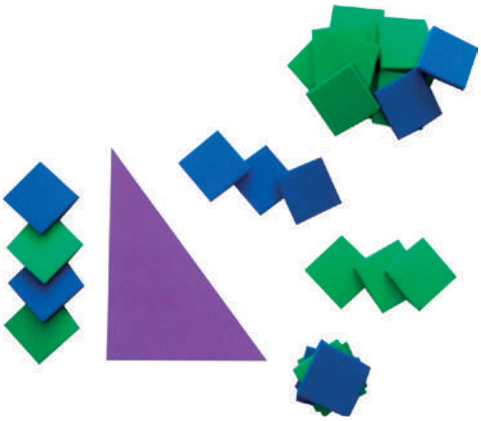


Figura 3.1: Kit Teorema de Pitágoras 1
Fonte: Autores

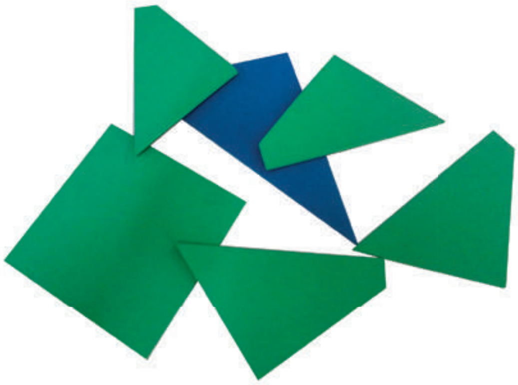


Figura 3.2: Kit Teorema de Pitágoras 2
Fonte: Autores

3.1 APRESENTAÇÃO

O Teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo. Na Geometria Euclidiana, o teorema afirma que: “Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos”.

Foi por meio do Teorema de Pitágoras que os conceitos e as definições de Números Irracionais começaram a ser introduzidos na Matemática. O primeiro irracional a surgir foi $\sqrt{2}$, que apareceu ao ser calculada a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos medindo 1.

Segundo Kaleff, Rei e Garcia (1997), geralmente o Teorema de Pitágoras é apresentado aos alunos de uma maneira dedutiva. Porém, essa forma de abordar esse assunto pode trazer dificuldades aos alunos em acompanhar tal abordagem. Dessa forma, apresentaremos uma abordagem mais intuitiva, por meio de quebra-cabeças que permitem a visualização das situações geométricas que envolvem esse teorema.

3.2 DESCRIÇÃO

O Kit Teorema de Pitágoras 1 é composto por 26 peças/figuras geométricas dos seguintes tipos:

- 25 quadrados;
- 1 triângulo retângulo.

O Kit Teorema de Pitágoras 2 é composto por 6 peças/figuras geométricas dos seguintes tipos:

- 4 quadriláteros;
- 1 triângulo retângulo;
- 1 quadrado.

3.3 OBJETIVOS

Proporcionar a visualização e a compreensão da demonstração do Teorema de Pitágoras.

3.4 CONTEÚDOS ESTRUTURANTES

Números, Álgebra e Geometria.

3.5 CONTEÚDOS BÁSICO

Teorema de Pitágoras.

3.6 NÍVEL DE ENSINO SUGERIDO

9º ano.

3.7 COMO CONSTRUIR

O Kit Teorema de Pitágoras do Laboratório do Programa Brasil Profissionalizado é feito em EVA. desse modo, é possível que seja confeccionado facilmente e com baixo custo. As medidas de confecção ficam à critério do professor.

CONFECÇÃO DO KIT TEOREMA DE PITÁGORAS 1

Construa primeiramente um triângulo retângulo de lados 18 cm, 24 cm e 30 cm. Sobre os catetos do triângulo, construa quadrados dividindo-os em quadradinhos de 6 cm de lado e depois recorte-os.

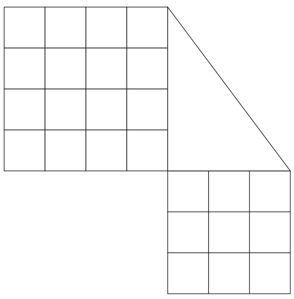


Figura 3.3: Material confeccionado 1
Fonte: Autores

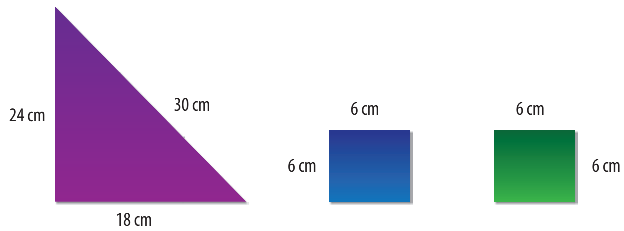


Figura 3.4: Material confeccionado 1
Fonte: Autores

CONFECÇÃO DO KIT TEOREMA DE PITÁGORAS 2[1]

Sobre uma folha de EVA, desenhe um triângulo retângulo e indique os vértices desse triângulo por letras A, B e C, de maneira que BC represente a hipotenusa. Podemos considerar as mesmas medidas do triângulo retângulo do material confeccionado 1, ou seja, hipotenusa medindo 30 cm e os catetos medindo 18 cm e 24 cm, respectivamente.

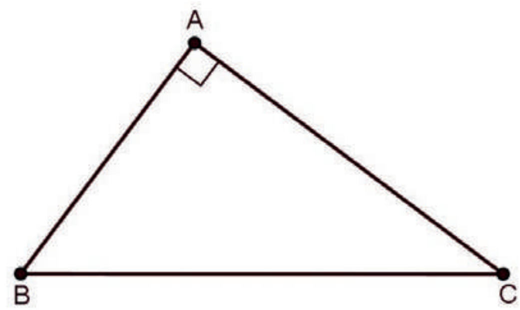


Figura 3.5: Material confeccionado 2
Fonte: Autores

1 A construção desse quebra cabeça foi extraído de Kaleff, Rei e Garcia (1997, p. 57-8).

A seguir, sobre os catetos do triângulo desenhe quadrados, de modo a obter os quadrados *ACDE* e *ABGF*.

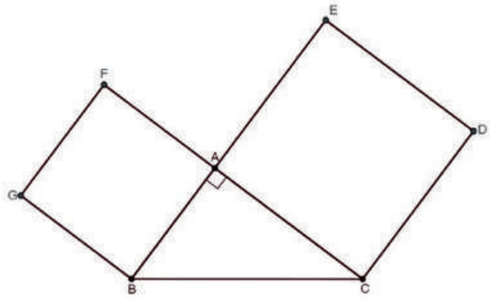


Figura 3.6: Material confeccionado 2
Fonte: Autores

Desenhe as duas diagonais do quadrado *ACDE* e indique por *O* o ponto de intersecção dessas diagonais.

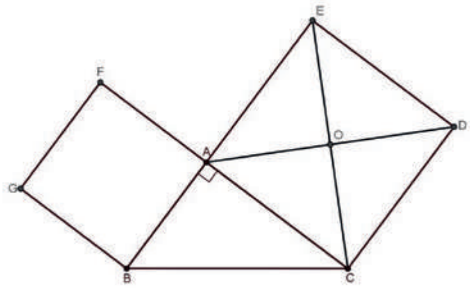


Figura 3.7: Material confeccionado 2
Fonte: Autores

Desenhe uma reta *K*, perpendicular à hipotenusa e passando por *O*.
Por *O* desenhe uma reta *J*, perpendicular a *K*. Note que a reta *J* é paralela à hipotenusa.

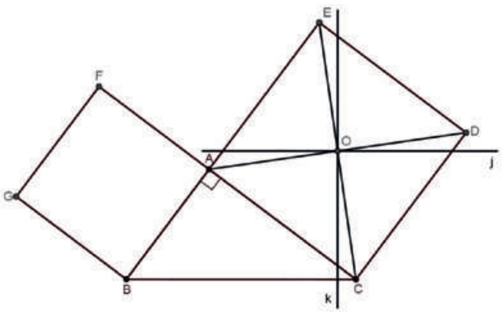


Figura 3.8: Material confeccionado 2
Fonte: Autores, baseada em Kaleff et al (1997, p. 58)

Observe também que as retas *J* e *K* dividem o quadrado *ACDE* em quatro quadriláteros de mesma forma e de mesmo tamanho.

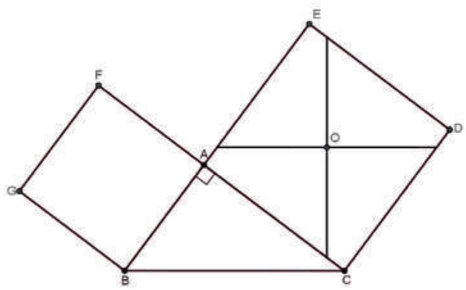


Figura 3.9: Material confeccionado 2
Fonte: Autores

Recorte o quadrado *ABGF* e as quatro partes que formam o quadrado *ACDE*.

Essas cinco peças cortadas formam o quebra-cabeça.

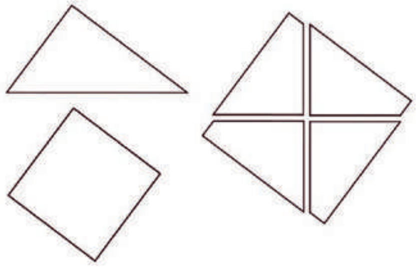


Figura 3.10: Material confeccionado 2
Fonte: Autores

Observação: Se o triângulo retângulo construído for escaleno, as peças resultantes da divisão do quadrado *ACDE* têm a forma de um quadrilátero, mas se o triângulo retângulo for isósceles, então as peças são triangulares, pois as diagonais desse quadrado coincidem com as retas *J* e *K*.

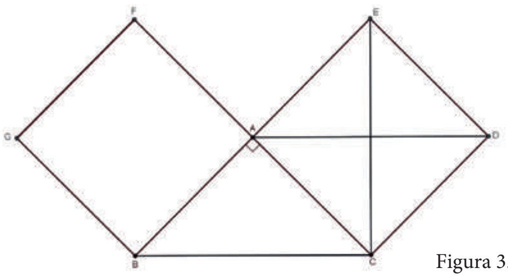


Figura 3.11: Material confeccionado 2
Fonte: Autores, baseada em Kaleff, Rei e Garcia (1997, p. 57-8)

3.8 DESENVOLVIMENTO DE ATIVIDADE

Sugestões de atividades para o Kit Teorema de Pitágoras 1

Recomendamos que o professor deixe o Kit Teorema de Pitágoras de posse do aluno para que ele possa se familiarizar com o material e, em seguida, o professor poderá encaminhar a atividade 1.

Atividade 1: Mostre que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

a) Com os quadradinhos, forme dois quadrados sobre os catetos do triângulo retângulo.

b) Quantos quadradinhos há em cada um dos quadrados formados sobre os catetos?

c) Depois, com todos os quadradinhos, forme um quadrado na hipotenusa do triângulo retângulo.

d) Quantos quadradinhos há no quadrado formado sobre a hipotenusa?

e) Qual a relação entre o número de quadradinhos do quadrado da hipotenusa e os quadrados dos catetos?

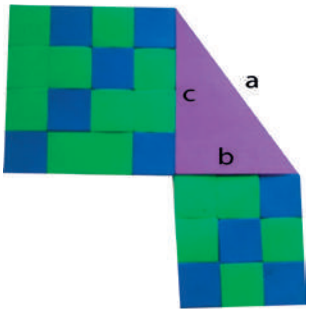


Figura 3.12: Teorema de Pitágoras
Fonte: Autores

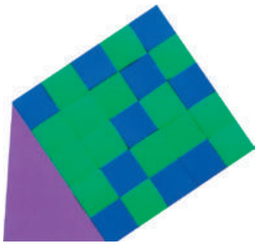


Figura 3.13: Teorema de Pitágoras
Fonte: Autores

Conclusão

Observe que o quadrado construído na hipotenusa tem 5 × 5 = 25 quadradinhos. Logo, conclui-se que a área do quadrado maior é igual a 25 quadradinhos. Analogamente, conclui-se que as áreas dos quadrados pequeno e médio é igual a 9 e 16 quadradinhos respectivamente. Portanto, 25 = 9 + 16, ou seja, a área do quadrado maior é igual à soma dos quadrados médio e pequeno.

Sugestões de atividade para o Kit Teorema de Pitágoras 2

Atividade 2: Mostre que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

a) Com as cinco peças, forme dois quadrados sobre os catetos respectivamente.

b) Com as cinco peças, formar uma figura quadrada sobre a hipotenusa, afim de o aluno entender a ideia geométrica sobre a relação de Pitágoras.

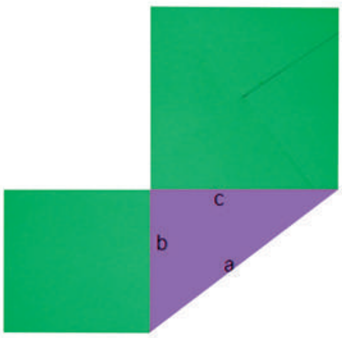


Figura 3.14: Teorema de Pitágoras
Fonte: Autores

Solução: Para mostrar que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, com os cinco quadriláteros, formamos dois quadrados sobre os catetos (Figura 3.14). E com as mesmas figuras geométricas, formamos um quadrado sobre a hipotenusa do triângulo retângulo, como podemos ver na Figura 3.15. Desta forma, conseguimos mostrar que $a^2 = b^2 + c^2$.

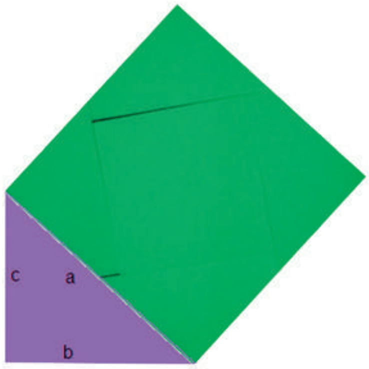


Figura 3.15: Teorema de Pitágoras
Fonte: Autores

3.9 POTENCIALIDADE

Por meio desse material é possível proporcionar a visualização e o entendimento de, pelo menos, duas das demonstrações do Teorema de Pitágoras, conseguindo compreender o significado de que $a^2 = b^2 + c^2$, gerando facilidade em exercícios mais abstratos e da realidade. Além, de proporcionar o trabalho com elementos geométricos, tais como: ângulo reto, retas perpendiculares, triângulos retângulos, quadrados.

3.10 LIMITAÇÕES

Como limitação, é possível citar o fato de que o material manipulável que representa a demonstração do Teorema de Pitágoras, na maioria das vezes, é aplicado somente com Números Naturais em sala de aula. Tal fato dificulta no momento em que a necessidade de sua aplicação se faz diante de Números Decimais, por exemplo, algo muito comum em situações cotidianas. O professor deve ficar atento a esse detalhe.

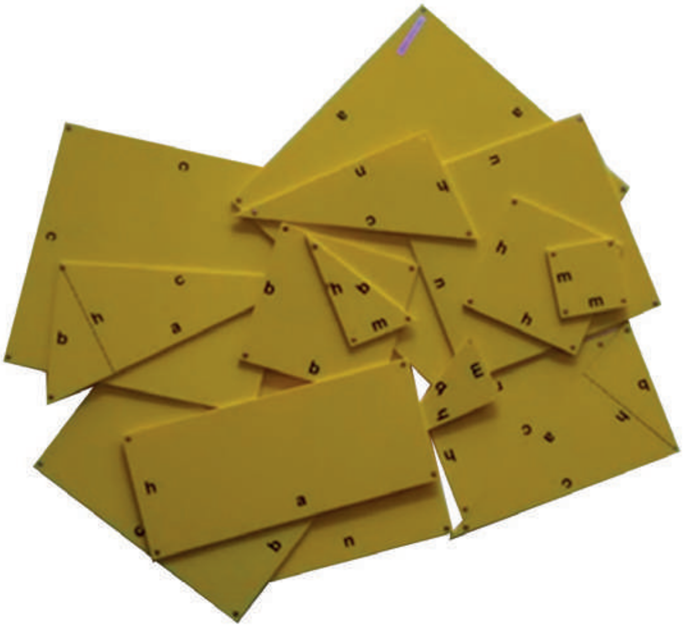


Figura 4.1: Kit Relações Métricas no Triângulo Retângulo
Fonte: Autores

4.1 APRESENTAÇÃO

Chamamos relações métricas no triângulo retângulo as relações existentes entre os seus diversos segmentos. Assim, para um triângulo retângulo, podemos estabelecer as seguintes relações entre as medidas de seus elementos:

$$a^2=b^2+c^2 \qquad a\,h=b\,c \qquad h^2=m\,n \qquad c^2=a\,n \qquad b^2=a\,m$$

Desta forma, o material didático Kit Relações Métricas no Triângulo Retângulo tem como objetivo desenvolver a visualização e a compreensão da origem das propriedades geométricas.

4.2 DESCRIÇÃO

O Laboratório de Matemática possui o material Kit Relações Métricas no Triângulo Retângulo em duas espécies: o material do professor e o material do aluno. O material do professor é ilustrado na Figura 4.1, é feito de plástico, com imãs em seus vértices, para serem utilizados nas lousas magnéticas disponibilizadas pelo Programa Federal. Já o material do aluno é feito de EVA. Os dois materiais tem as seguintes peças:

- 2 triângulos retângulos de catetos b, c e hipotenusa a;
- 2 triângulos retângulos de catetos h, m e hipotenusa b;
- 2 triângulos retângulos de catetos h, n e hipotenusa c;
- 1 quadrado de lado a;
- 1 quadrado de lado b;
- 1 quadrado de lado c;
- 1 quadrado de lado h;

- 1 quadrado de lado *m*;
- 1 quadrado de lado *n*;
- 1 retângulo de lados *a* e *n*;
- 1 retângulo de lados *a* e *m*;
- 1 retângulo de lados *m* e *n*;
- 1 retângulo de lados *a* e *h*;
- 1 retângulo de lados *b* e *c*.

4.3 OBJETIVOS

Desenvolver a visualização e a compreensão das propriedades geométricas que geram as Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

4.4 CONTEÚDOS ESTRUTURANTES

Grandezas e Medidas.

4.5 CONTEÚDO BÁSICO

Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

4.6 ANO E NÍVEL SUGERIDO

9° ano.

4.7 COMO CONSTRUIR

Além deste material fazer parte do Laboratório de Matemática do Programa Brasil Profissionalizado, ele pode ser confeccionado utilizando-se diversos materiais. Neste trabalho optamos por construí-lo em EVA. Utilizamos 3 folhas de EVA cor amarela (opcional), tesoura, e caneta permanente. Para tal confecção, Lamas e Mauri (s/d) sugerem as seguintes medidas:

a= 15 cm, b= 12 cm, c= 9 cm, h= 7,2 cm, m= 9,6 cm, n= 5,4 cm

Construa 6 quadrados de lados: *a*, *b*, *c*, *h*, *m* e *n*, e 5 retângulos de lados: *a* e *n*, *a* e *m*, *m* e *n*, *a* e *h*, *b* e *c*.

A construção é realizada de acordo com o modelo da Figura 4.2:

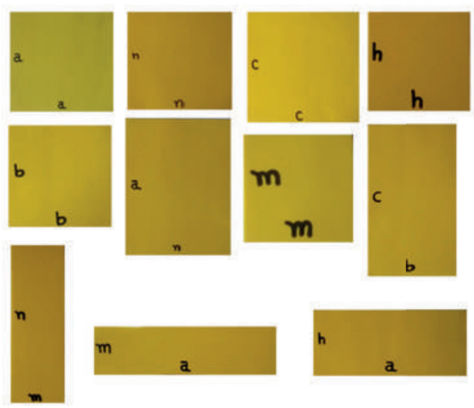


Figura 4.2: Kit Relações Métricas no Triângulo Retângulo em EVA
Fonte: Autores

Construa 2 triângulos retângulos de catetos b, c e hipotenusa a, 2 triângulos retângulos de catetos h, m e hipotenusa b e 2 triângulos retângulos de catetos h, n e hipotenusa c.

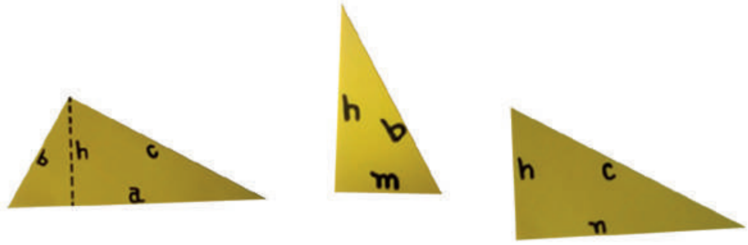


Figura 4.3: Triângulos retângulos
Fonte: Autores

4.8 DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

Além das atividades a seguir, o professor pode explorar com os alunos a área de cada uma das peças.

Temos duas formas de mostrarmos as Relações Métricas no Triângulo Retângulo. Na atividade 1 vamos demonstrar tais relações por semelhanças de triângulos e nas demais atividades será usada o conceito de área de retângulos. As atividades a seguir foram baseadas em Lamas e Mauri (s/d):

Atividade 1: Mostre por semelhança de triângulos as relações métricas.

A) Utilizando o triângulo retângulo de catetos h, n e hipotenusa c e o triângulo retângulo de catetos h, m e hipotenusa b, verifique, por semelhança de triângulos, que o quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, ou seja, $h^2=m\,n$.

Solução:

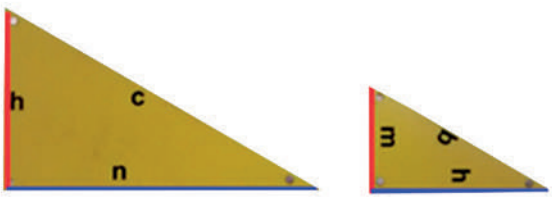


Figura 4.4: Triângulos retângulos
Fonte: Autores

Observando a Figura 4.4 temos:

$\frac{h}{m}=\frac{n}{h}$, ou seja, h está para m, assim como n está para h. Deste modo, multiplicando m e h ambos dos lados da igualdade teremos $h^2=m\,n$.

b) Utilizando o triângulo retângulo de catetos h, n e hipotenusa c e o triângulo retângulo de catetos c, b e hipotenusa a, verifique, por semelhança de triângulos, que o quadrado de cateto c é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa. Desse modo, $c^2=a\,n$.

Solução:

De acordo com a Figura 4.5, temos:

$\frac{c}{n} = \frac{a}{c}$, ou seja, c é proporcional à n, e a é proporcional a c. multiplicando ambos os lados por c e a, teremos: $c^2=a\,n$.

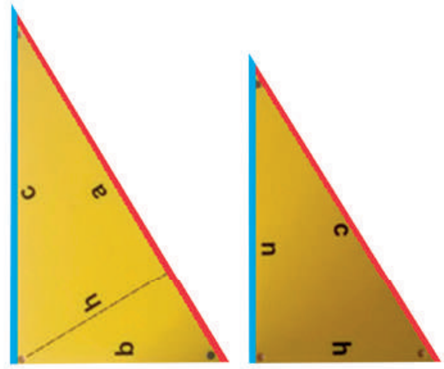


Figura 4.5: Triângulos retângulos
Fonte: Autores

c) Utilizando o triângulo retângulo de catetos h, m e hipotenusa b e o triângulo retângulo de catetos c, b e hipotenusa a, verifique que: $b^2=a\,m$, ou seja, o quadrado do cateto b é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

Solução:

$\frac{b}{m} = \frac{a}{b}$, assim, b está para m, do mesmo modo que a está para b. multiplicando a e b ambos os lados da igualdade teremos: $b^2=a\,m$.

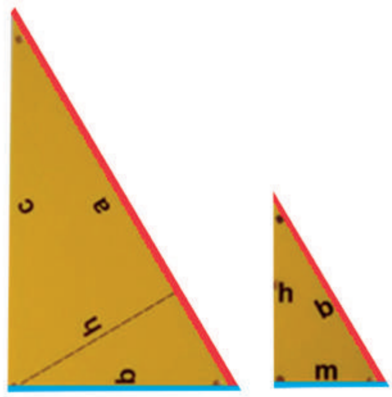


Figura 4.6: Triângulos retângulos
Fonte: Autores

d) Utilizando o triângulo retângulo de catetos h, n e hipotenusa c e o triângulo retângulo de catetos c, b e hipotenusa a, verifique que: $a\,h=b\,c$, ou seja, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a hipotenusa.

Solução:

$\frac{a}{c} = \frac{b}{h}$, ou seja, a é proporcional a c e b é proporcional a h. Multiplicando os dois lados por c e h, temos: $a\,h=b\,c$.

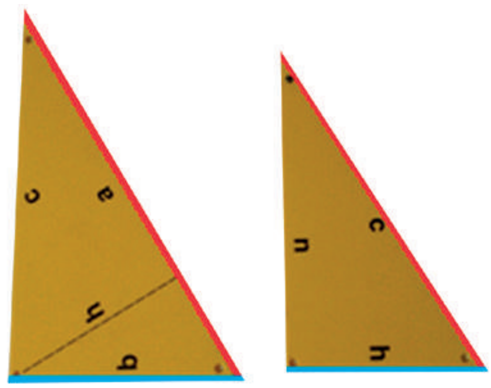


Figura 4.7: Triângulos retângulos
Fonte: Autores

e) Mostre que, em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, ou seja, $a^2=b^2+c^2$.

Solução: Para mostrarmos o Teorema de Pitágoras, basta somarmos as relações, $c^2=a\,n$ e $b^2=a\,m$, desta forma, teremos:

$$b^2+c^2=a\,m+a\,n$$
$$b^2+c^2=a(m+n)$$

Como $m+n=a$

$$b^2+c^2=a\,a$$
$$a^2=b^2+c^2$$

ou seja, em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Atividade 2: Mostrar que em um triângulo retângulo o produto da hipotenusa pela altura relativa a esta é igual ao produto dos catetos, ou seja, $a\,h=b\,c$.

Nesta atividade, será necessário utilizar 1 triângulo retângulo de catetos b, c e hipotenusa a, 1 triângulo retângulo de catetos h, m e hipotenusa b e 1 triângulo retângulo de catetos h, n e hipotenusa c.

Solução: Na Figura 4.8, temos um retângulo de lados a e h, com área $a\,h$, ou seja, o produto da hipotenusa pela altura relativa a esta. E na Figura 4.9, os mesmos triângulos utilizados na Figura 4.8 formam outra figura de área de lados b e c, ou seja, o produto dos catetos. Desta forma, podemos mostrar que $a\,h=b\,c$.

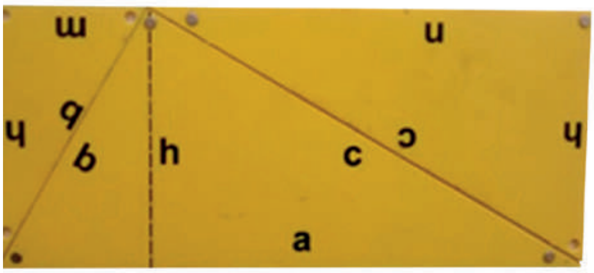


Figura 4.8: Relações métricas
Fonte: Autores

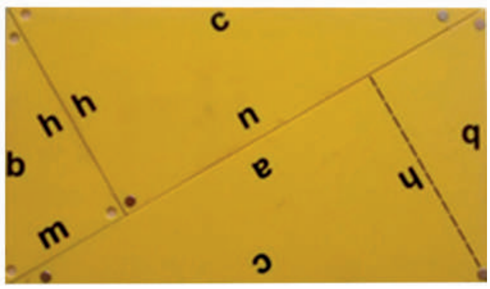


Figura 4.9: Relações métricas
Fonte: Autores

Dica: Tente resolver as atividades 3, 4, 5 e 6, de modo a formar um quadrado de lado $(b+c)$ utilizando-se as peças sugeridas em cada atividade e também a(s) peça(s) que representa(m) a área do primeiro termo da igualdade. Em seguida, construa um outro quadrado de lado $(b+c)$ utilizando-se as peças sugeridas em cada atividade, porém utilizando a(s) peça(s) que representa(m) o segundo termo da igualdade.

Atividade 3: <u>Teorema de Pitágoras:</u> Mostre que, em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, ou seja, $a^2=b^2+c^2$.

Nesta atividade, será necessário utilizar o quadrado de lado a, o quadrado de lado b, o quadrado de lado c, os 2 triângulos retângulos de catetos b, c e hipotenusa a, os 2 triângulos retângulos de catetos h, m e hipotenusa b e os 2 triângulos retângulos de catetos h, n e hipotenusa c.

Solução: Primeiro, vamos construir um quadrado de lado (b+c), utilizando as seguintes peças: o quadrado de lado b, o quadrado de lado c, os 2 triângulos retângulos de catetos b, c e hipotenusa a, os 2 triângulos retângulos de catetos h, m e hipotenusa b e os 2 triângulos retângulos de catetos h, n e hipotenusa c, como mostra a Figura 4.10.

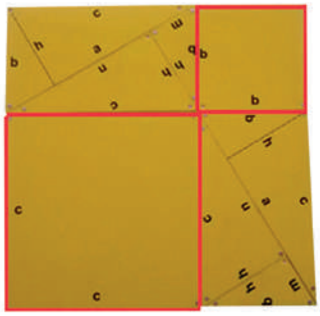
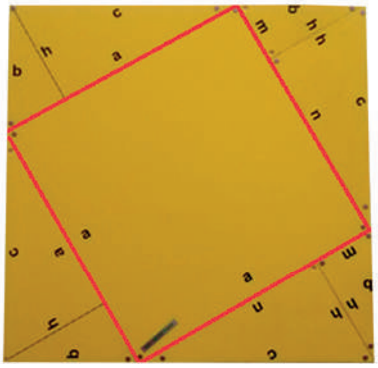


Figura 4.10: Teorema de Pitágoras
Fonte: Autores



Agora vamos substituir os quadrados de lado c e b, pelo quadrado de lado a, de forma que se mantém o mesmo quadrado de lados (b+c), como mostra a Figura 4.11.

Figura 4.11: Teorema de Pitágoras
Fonte: Autores

Portanto, mostramos o Teorema de Pitágoras: $a^2=b^2+c^2$.

Atividade 4: Mostrar que, em um triângulo retângulo, o quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, ou seja, $h^2=m\ n$.

Nesta atividade, será necessário utilizar o quadrado de lado b, o quadrado de lado n, o quadrado de lado h, o retângulo de lados m e n, 2 triângulos retângulos de catetos b, c e hipotenusa a, 2 triângulos retângulos de catetos h, m e hipotenusa b, 2 triângulos retângulos de catetos h, n e hipotenusa c.

Solução: Primeiro, vamos construir um quadrado de lado (b+c), utilizando o quadrado de lado b, o quadrado de lado n, o quadrado de lado h, 2 triângulos retângulos de catetos b, c e hipotenusa a, 2 triângulos retângulos de catetos h, m e hipotenusa b e 2 triângulos retângulos de catetos h, n e hipotenusa c, como mostra a Figura 4.12.

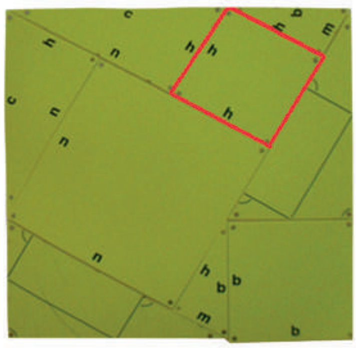
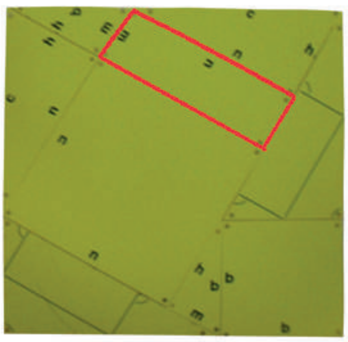


Figura 4.12: Relações métricas
Fonte: Autores



Substituindo o quadrado de lado h pelo retângulo de lados m e n, podemos construir outra figura, de modo que a área da Figura 4.12 seja igual a área da Figura 4.13, cujos lados são (b+c).

Assim, podemos verificar que a área dos dois quadrados das Figuras 4.12 e 4.13 não foi alterada, portanto mostramos que $h^2=m\ n$.

Figura 4.13: Relações métricas
Fonte: Autores

Atividade 5: Mostrar que, em um triângulo retângulo, o quadrado de cateto c é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa. Desse modo, $c^2=a\ n$.

Para a resolução desta atividade, será necessário utilizar o quadrado de lado c, o quadrado de lado b, o retângulo de lados a e n, 2 triângulos retângulos de catetos b, c e hipotenusa a, 2 triângulos retângulos de catetos h, m e hipotenusa b, 2 triângulos retângulos de catetos h, n e hipotenusa c.

Solução: Primeiro, vamos construir um quadrado de lados $(b+c)$, utilizando as seguintes peças: o quadrado de lado c, o quadrado de lado b, 2 triângulos retângulos de catetos b, c e hipotenusa a, 2 triângulos retângulos de catetos h, m e hipotenusa b, 2 triângulos retângulos de catetos h, n e hipotenusa c, como mostra a Figura 4.14.

Figura 4.14: Relações métricas
Fonte: Autores

O quadrado de lado c é substituído pelo retângulo de lados a e n, formando, assim, um novo quadrado de lados $(b+c)$, como mostra a Figura 4.15.

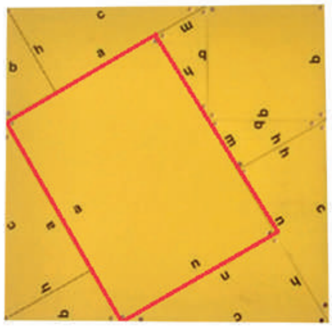


Figura 4.15: Relações métricas
Fonte: Autores

Desta forma, verifica-se que o quadrado de lado c ocupa a mesma área do retângulo de lados a e n. Logo, $c^2=n\ a$.

Atividade 6: Mostrar que, em um triângulo retângulo, o quadrado do cateto b é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa, ou seja, $b^2=a\ m$.

Nesta atividade, será necessário utilizar as seguintes peças: o quadrado de lado b, o quadrado de lado c, o retângulo de lados a e m, 2 triângulos retângulos de catetos b, c e hipotenusa a, 2 triângulos retângulos de catetos h, m e hipotenusa b, 2 triângulos retângulos de catetos h, n e hipotenusa c.

Solução: Para mostrarmos esta relação, vamos construir um quadrado de lado $(b+c)$, utilizando o quadrado de lado b, o quadrado de lado c, 2 triângulos retângulos de catetos b, c e hipotenusa a, 2 triângulos retângulos de catetos h, m e hipotenusa b, 2 triângulos retângulos de catetos h, n e hipotenusa c, como mostra a Figura 4.16.

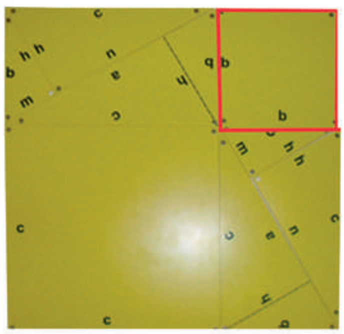


Figura 4.16: Relações métricas
Fonte: Autores

O quadrado de lado b é substituído pelo retângulo de lados a e m, como mostra a Figura 4.17. Como o quadrado de lado b ocupa a mesma área que o retângulo de lados a e m, $b^2=a\ m$.

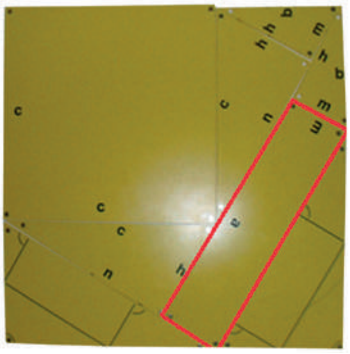


Figura 4.17: Relações métricas
Fonte: Autores

4.9 POTENCIALIDADES

Por meio desse material, é possível proporcionar ao aluno a exploração das propriedades que estabelecem as Relações Métricas no Triângulo Retângulo. Tal exploração pode ser feita por meio de conceitos que envolvem semelhança de triângulos, área e o uso do Teorema de Pitágoras. Normalmente, as Relações Métricas são apresentadas aos alunos sem demonstrar sua origem. A proposta ao trabalhar com esse material é oferecer aos alunos uma possibilidade de compreensão junto às justificativas para a existência dessas relações métricas.

4.10 LIMITAÇÕES

Na confecção do material foram atribuídas medidas. Se o professor for construir o material com os alunos, pode ser que eles pensem que o Teorema de Pitágoras só é válido para aquelas medidas.

Figura 5.1: Kit Produtos Notáveis
Fonte: Autores

5.1 APRESENTAÇÃO

O Kit Produtos Notáveis auxilia para o ensino e a aprendizagem da Álgebra, pois por meio dele é possível explorar a compreensão de propriedades, tais como a fatoração e a raiz de uma equação.

Segundo Boralho e Barbosa (2009) o pensamento algébrico diz respeito a utilização de símbolos algébricos para representar uma situação matemática, aplicar procedimentos para obter um resultado e interpretar esse resultado. A Álgebra utiliza-se de simbolismos para sua representação e estes propiciam muitas facilidades em seu ensino que deixou de ser para poucos indivíduos, para se tornar requisito para a formação do cidadão comum. Porém, este estudo vem apresentando tantos fracassos que passou a ser um elemento de exclusão, uma vez que os alunos não conseguem compreendê-la e acabam realizando as atividades mecanicamente sem entender seu significado (CASTRO, 2003 *apud* GUADAGNINI, 2013, p. 20). Mediante a isto, o Kit Produtos Notáveis tem por finalidade minimizar dificuldades e proporcionar a compreensão da álgebra.

5.2 DESCRIÇÃO

O Kit Produtos Notáveis é composto por 71 peças/figuras geométricas dos seguintes tipos:

- 1 cubo de comprimento, largura e altura medindo x, cujo volume é x^3;
- 30 cubinhos de comprimento, largura e altura medindo 1, cujo volume é 1;
- 10 placas de comprimento e largura medindo x e altura 1, cujo volume é x^2;
- 30 barras de comprimento x, largura e altura medindo 1, cujo volume é x.

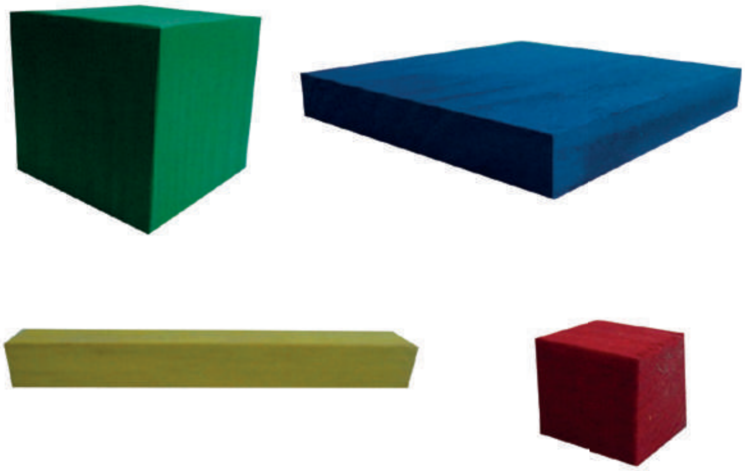


Figura 5.2: Peças do kit Produtos Notáveis
Fonte: Autores

5.3 OBJETIVOS

Proporcionar a visualização e a compreensão de propriedades da Álgebra, como a fatoração e a determinação das raízes de equações de 1°, 2° e 3° grau, por meio da relação entre os sólidos geométricos e suas propriedades.

5.4 CONTEÚDOS ESTRUTURANTES

Números, Álgebra e Geometria.

5.5 CONTEÚDOS BÁSICOS

Equação do 1°, 2° e 3° grau.

5.6 ANO E NÍVEL SUGERIDOS

7° e 8° ano.

5.7 COMO CONSTRUIR

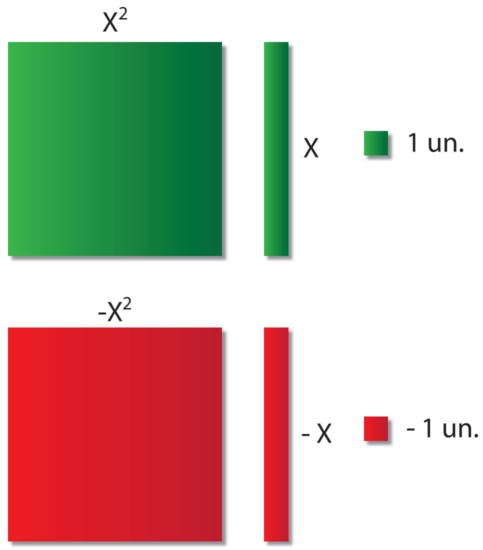
Este material faz parte do Laboratório do Programa Brasil Profissionalizado. Porém, é possível confeccionar um material com objetivos similares, utilizando cartolina americana ou EVA ou cartolina tradicional, entre outros. Optamos por confeccioná-lo em papel cartão. Utilizamos: régua, lápis, tesoura e duas folhas de papel cartão cores (opcional) verde e vermelho, na qual a cor verde representa os valores positivos e a cor vermelha representa os valores negativos. Para a construção do material, sugerimos as seguintes medidas e quantidades: x=15 cm e 1 un. = 1,5 cm.

- 5 quadrados de lados x na cor verde que chamaremos de peça x^2 e 5 quadrados de lados x na cor vermelha que chamaremos de peça $-x^2$;

- 15 retângulos de comprimento x e largura 1 un. na cor verde que serão denotados por peça x e 15 retângulos de comprimento x e largura 1 un. na cor vermelha chamados de peça $-x$;

- 25 quadradinhos de lados 1 un. na cor verde chamados de peça 1 e 25 quadradinhos de lados 1 un. na cor vermelha denotados por -1.

- A construção é realizada de acordo com o modelo da Figura 5.3.



Observação: Outra opção é confeccionar em papel cartão e para indicar os simétricos/opostos utilizar os versos das peças. Nesse caso, confeccionar apenas 5 quadrados de lados x, 15 retângulos de comprimento x e largura 1 e 25 quadradinhos de lados 1 unidade.

Figura 5.3: Confecção do Kit Produtos Notáveis em cartolina americana
Fonte: Autores

5.8 DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

Sugestões de atividades para o Kit Produtos Notáveis

Sugerimos que este material seja utilizado para introduzir o conteúdo da Álgebra antes de sua formalização matemática, pois se for aplicado depois do aluno ter o conhecimento do conteúdo, este poderá utilizar as propriedades por ele já conhecidas, tais como: fatoração e propriedade distributiva dos polinômios.

No primeiro momento, apresentaremos o material especificando as medidas e o volume de cada peça. Na sequência, faremos atividades que foram baseadas em Fanti (s/d) e serão utilizadas para o reconhecimento do kit.

Na resolução desta atividade, deveremos escolher as peças do Kit Produtos Notáveis que representam cada uma das expressões algébricas.

Atividade 1: (Reconhecimento do material) Escolha as peças que representam cada uma das seguintes expressões:

a) $2x^2 + 3x + 6$

Solução

Na resolução desta atividade utilizamos duas placas, três barras, seis cubinhos, para representar $2x^2$, $3x$ e 6 unidades, concomitantemente. A representação de cada peça foi apresentada na Figura 5.4.

Figura 5.4: Resolução da atividade 1a
Fonte: Autores

b) $x^3 + 3x^2 + 5x + 7$

Solução

Para resolvermos esta atividade utilizamos um cubo, três placas, cinco barras e sete cubinhos, para representar $1x^3$, $3x^2$, $5x$ e 7 unidades, concomitantemente.

Figura 5.5: Resolução da atividade 1b
Fonte: Autores

Para a realização das atividades a seguir, primeiro deverá ser construído um molde com as medidas dos lados do paralelepípedo. O professor precisa observar se o aluno não está preenchendo o molde de forma errônea, por exemplo, substituindo uma barra por seis cubinhos, uma placa por seis barras ou um cubo por seis placas, pois apesar de coincidir, isso não significa que x mede 6, x^2 mede $6x$ ou que x^3 mede $6x^2$.

É interessante observar que este material não deve ser adotado utilizando os mesmos princípios do Material Dourado. No Material Dourado, há uma troca de objetos no qual são atribuídos valores para cada objeto. No caso do kit Produtos Notáveis, o valor não está na quantidade a ser substituída e sim na área a ser considerada na face de cada peça.

Na sequência, para resolver a atividade, deverá ser preenchida o espaço formado pelo molde com as peças adequadas, de modo a completar o paralelepípedo, quando for o caso.

Atividade 2: (Multiplicação e Potenciação) Utilizando as peças do kit Produtos Notáveis determine:

a) $x\,(x + 1)$

Solução

Conforme dito anteriormente, primeiramente montamos o molde cujos lados são formados por duas peças de volume x e uma peça de volume 1, como mostra a Figura 5.6.

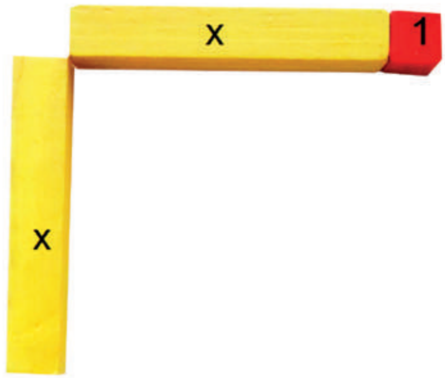


Figura 5.6: Molde da atividade 2a
Fonte: Autores

Com o intuito de resolver a multiplicação, será necessário preencher o molde com as peças adequadas. Como temos duas peças cujos volumes são x, utilizamos, primeiramente, uma peça de volume x^2, ou seja, a placa, conforme a Figura 5.7.

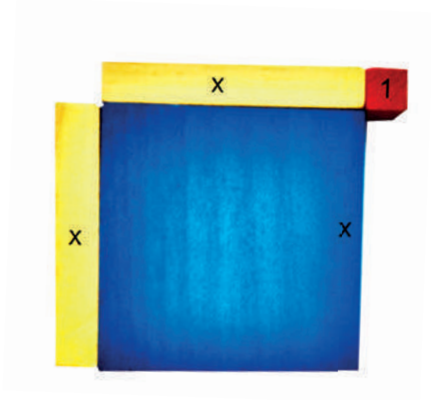


Figura 5.7: Resolução da atividade 2a
Fonte: Autores

Podemos observar que ainda não preenchemos totalmente o molde. Para isso temos que escolher a peça de volume x, como mostra a Figura 5.8.

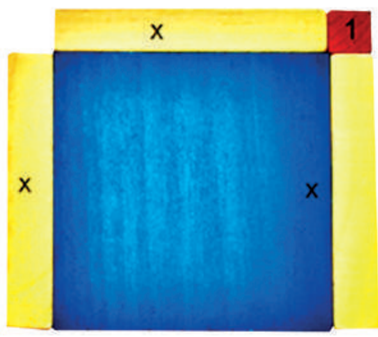


Figura 5.8: Resolução da atividade 2a
Fonte: Autores

Para finalizar, retiramos o molde e obtemos o resultado da expressão da Figura 5.9, ou seja, $x(x+1) = x^2 + x$

Figura 5.9: Resolução da atividade 2a
Fonte: Autores

b) $(x + 1)^2$

Solução

Para a realização desta atividade, construímos um molde com duas peças de volumes x e duas peças de volume 1. Para preenchermos o espaço formado pelo molde, utilizamos uma peça de volume x^2, duas peças de volume x e uma peça de volume 1. Em seguida, retiramos o molde para obtermos o resultado, ou seja, $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, conforme mostra a Figura 5.10.

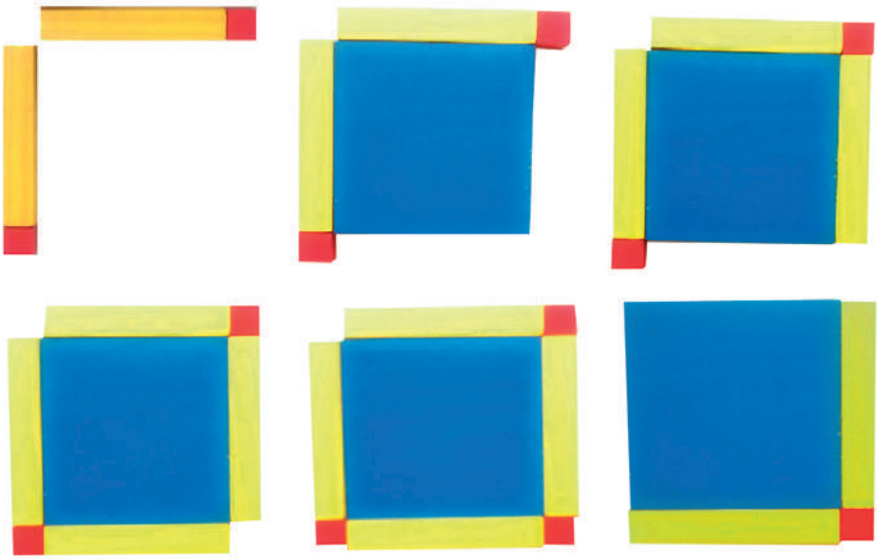
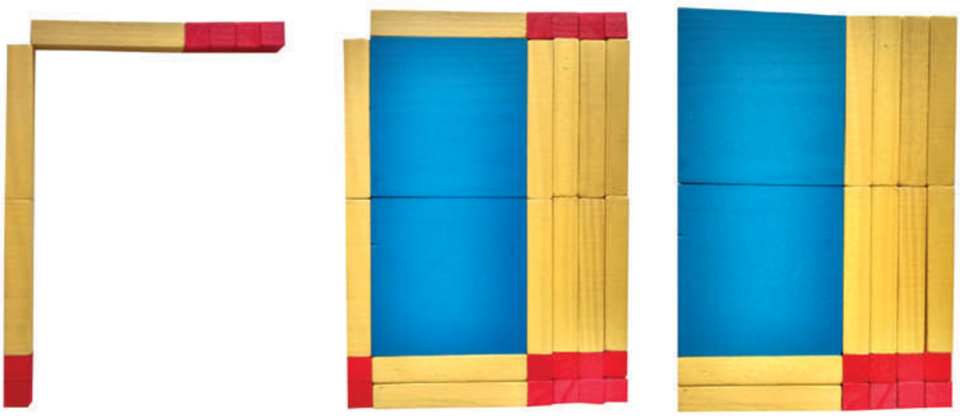


Figura 5.10: Resolução da atividade 2b
Fonte: Autores

c) $(2x + 2)(x + 4)$

Solução

Na resolução desta atividade, procedemos da mesma maneira do item anterior.



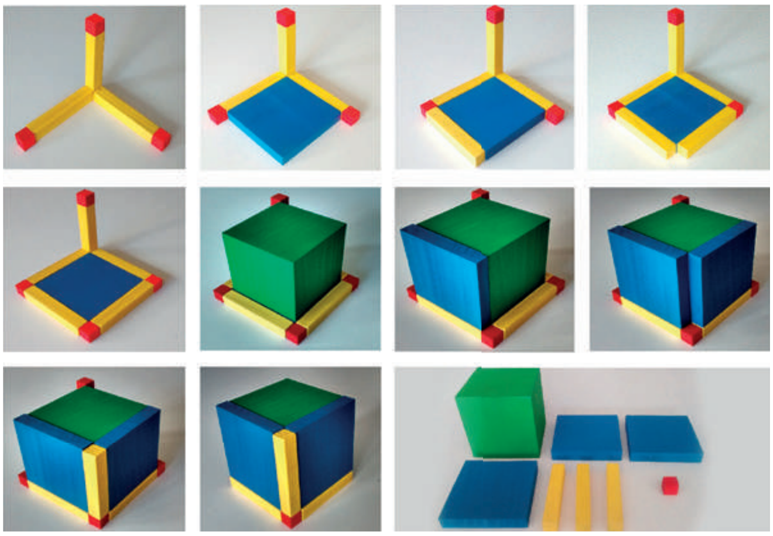
Logo, $(2x + 2)(x + 4) = 2x^2 + 10x + 8$

Figura 5.11: Resolução da atividade 2c
Fonte: Autores

d) $(x + 1)^3$

Solução

Na resolução desta atividade, fizemos um molde com três peças de volume x e três peças de volume 1. Preenchemos todo o espaço formado pelo molde com os sólidos geométricos adequados, que neste caso foram: uma peça com volume x^3, três peças com volume x^2, três peças com volume x e uma peça com volume 1, de modo a formar um paralelepípedo mostrado na Figura 5.12.



Para finalizar, retiramos o molde, desmontamos o paralelepípedo e verificamos quais peças foram utilizadas. Assim, temos que $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Figura 5.12: Resolução da atividade 2d
Fonte: Autores

Nas atividades a seguir, escolhemos as peças que representam as expressões e, em seguida, as ajustamos de modo a formar um paralelepípedo.

Atividade 3: (Fatoração) Utilizando as peças do Kit Produtos Notáveis, fatore as seguintes expressões:

a) $x^2 + 2x + 1$.

Solução

Para realizar a fatoração do polinômio $x^2 + 2x + 1$, selecionamos 1 peça que tenha volume x^2, 2 peças de volume x e uma de volume 1, e arranjamos de modo a formar um paralelepípedo, como podemos ver na Figura 5.13. Dessa forma, obtemos um paralelepípedo de comprimento $x+1$, largura $x+1$ e altura 1, ou seja, $x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1)$.

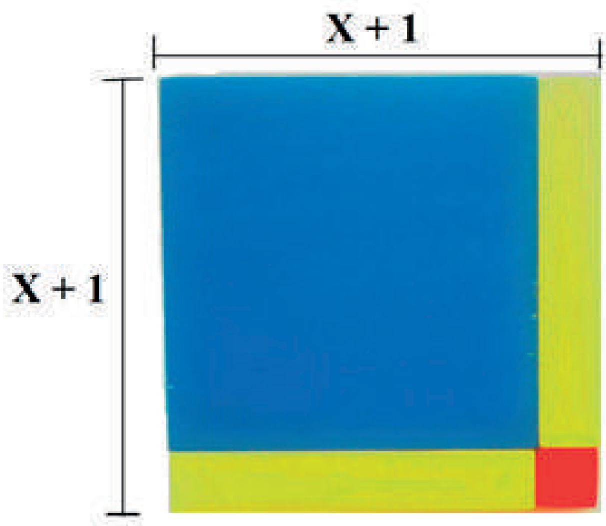


Figura 5.13: Resolução da atividade 3a
Fonte: Autores

b) $4x^2 + 8x + 4$

Solução

Na solução dessa atividade, procedemos da mesma forma da letra a, porém utilizando 4 peças de volume x^2, 8 peças de volume x e quatro peças de volume 1.
Dessa forma, obtemos um paralelepípedo de comprimento $(2x+2)$, largura $(2x+2)$ e altura 1, ou seja, $4x^2 + 8x + 4 = (2x+2)(2x+2)$.

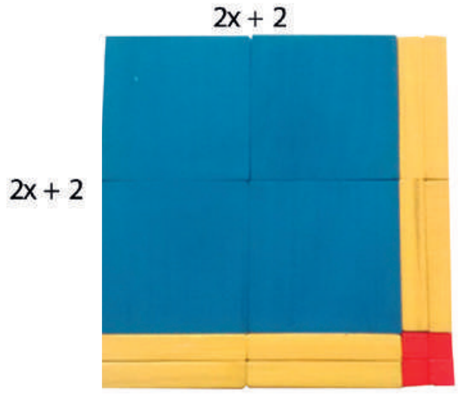


Figura 5.14: Resolução da atividade 3a
Fonte: Autores

c) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

Solução

Para fatorar $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, selecionamos 1 peça de volume x^3, 6 peças de volume x^2, 11 peças de volume x e 6 peças de volume 1 e arranjamo-las de modo a formar um paralelepípedo, como ilustra a Figura 5.15. Sendo assim, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+2)(x+3)$. Vale ressaltar que há várias maneiras de dispor as peças de modo a formar um paralelepípedo de mesma fatoração.

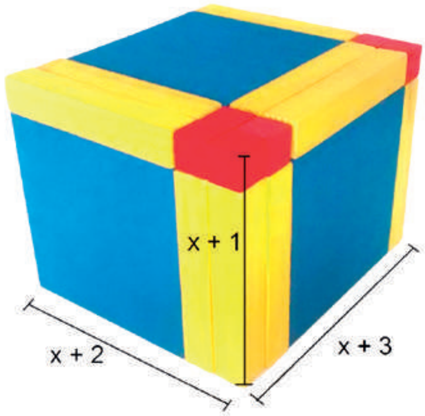


Figura 5.15: Resolução da atividade 3c
Fonte: Autores

Sugestões de atividades para o material confeccionado

A solução desta atividade consiste em selecionar as peças que representam cada expressão algébrica e representar com essas peças a expressão solicitada.

Atividade 1: (Reconhecimento do material) Escolha as peças do material confeccionado que representa cada uma das seguintes expressões:

a) $x^2 + x + 1$

Solução

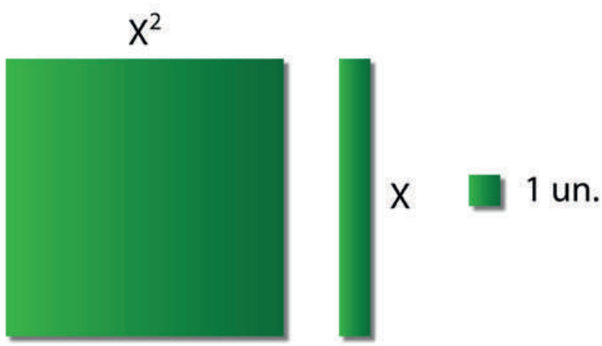


Figura 5.16: Resolução da atividade 1a com o material confeccionado
Fonte: Autores

b) $-x^2 - x - 1$

Solução

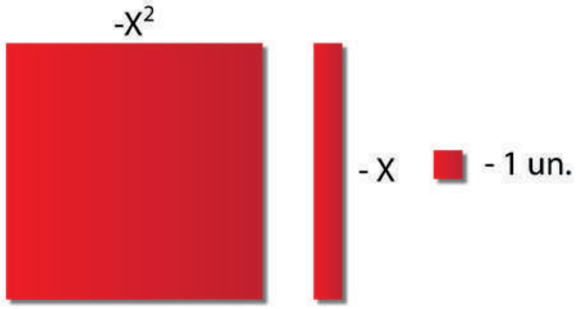


Figura 5.17: Resolução da atividade 1b com o material confeccionado
Fonte: Autores

c) $3x^2 - 5x + 4$

Solução

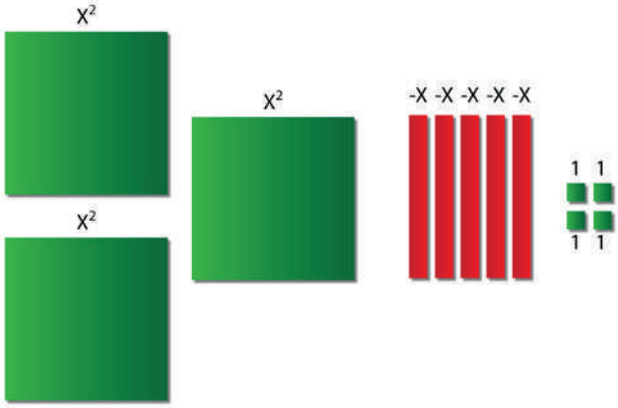


Figura 5.18: Resolução da atividade 1c do material confeccionado
Fonte: Autores

Na resolução desta atividade, tem-se que selecionar e agrupar as peças, modelando-as à expressão. Em seguida, efetuar as operações necessárias para obter o resultado desejado.

Atividade 2: (Simplificação, Adição e Subtração) Utilizando as peças do material confeccionado, determine:

$$(-3x + 7) + (3x^2 + 3x - 5) = 3x^2 + 2$$

Solução:

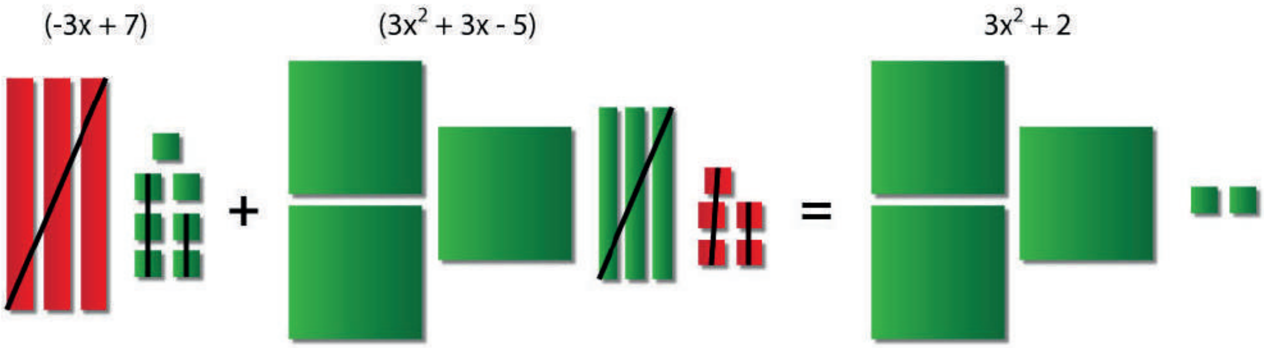


Figura 5.19: Resolução da atividade 2 do material confeccionado
Fonte: Autores

Para a resolução da atividade 3 (*a*), (*b*) e (*c*) a seguir, é necessário construir um molde referente à expressão dada e preencher a sua a área de tal modo a formar um retângulo. Feito isto, retiramos o molde e verificamos a quantidade de peças que sobraram, sendo que tal quantidade será a expressão do resultado.

Atividade 3: (Multiplicação e Potenciação) Utilizando as peças do material confeccionado, determine:

a) $5(x)$

Solução:

Figura 5.20
Fonte: Autores

b) $(x+1)^2$

Solução

O resultado da expressão $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, como podemos ver na Figura 5.22.

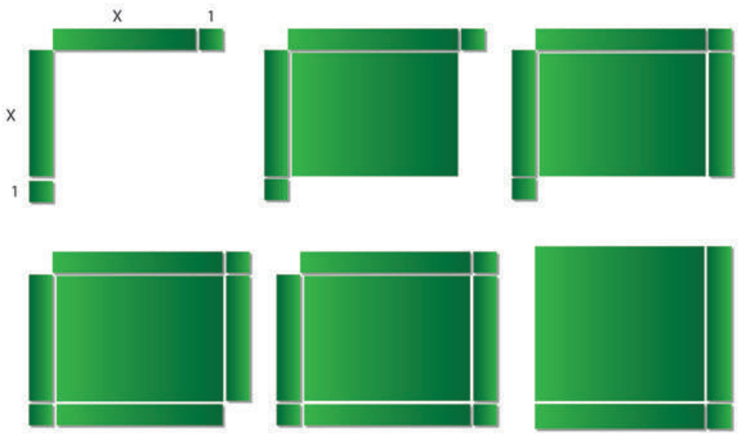


Figura 5.21: Resolução da atividade 3b do material confeccionado
Fonte: Autores

Figura 5.22: Resolução da atividade 3b do material confeccionado
Fonte: Autores

c) $(x + 3)(x + 4)$

Solução:

Podemos verificar que, efetuados os procedimentos necessários, obtivemos que a expressão $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$, conforme mostra a Figura 5.23.

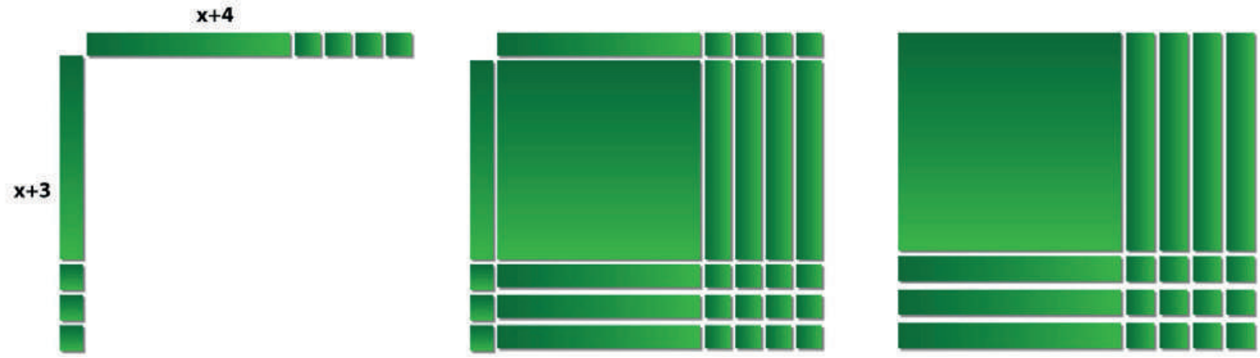


Figura 5.23: Resolução da atividade 3d do material confeccionado
Fonte: Autores

Nas atividades (d) e (e), além da adição trabalharemos com a subtração. Desta forma, a sugestão para representar a expressão na qual será necessário subtrair certa quantidade, é utilizar peças vermelhas sobrepondo-as às peças verdes, com o objetivo de retirá-las.

c) $(x-1)^2$

Solução:

A sugestão do molde para $(x - 1)^2$, é usarmos duas peças x e duas peças -1, cuja peças -1 serão sobrepostas às peças x, como podemos ver na Figura 5.24.

Figura 5.24: Resolução da atividade 3d do material confeccionado
Fonte: Autores

Para completarmos o molde, primeiramente utilizamos uma peça x^2. Em seguida, observamos que não satisfaz os lados do molde, que é $x-1$. Deste modo, sobrepomos uma peça $-x$ em x^2. Em seguida, devemos acrescentar uma peça 1, para podermos retirar a segunda peça x. Sendo assim, iremos sobrepor a peça $-x$. Veja a Figura 5.25.

Figura 5.25: Resolução da atividade 3d do material confeccionado
Fonte: Autores

Depois dos procedimentos realizados, retiramos o molde e verificamos a expressão

$(x-1)^2= x^2 - 2x + 1$, conforme mostra a Figura 5.26.

Figura 5.26: Resolução da atividade 3d do material confeccionado
Fonte: Autores

c) $(x - 3)(x + 2)$

Solução

A sugestão do molde para $(x - 3)(x + 2)$ é usarmos duas peças x, duas peças 1 e três peças -1 que serão sobrepostas nas peças x.

Ao preenchermos o molde, primeiramente utilizamos a peça x^2, e para satisfazer o lado $x-3$, utilizamos três peças $-x$ em que sobrepomos na peça x^2. Em seguida, acrescentamos duas peças x e sobre elas seis unidades negativas. Posteriormente, retiramos o molde e obtivemos $x^2 - 3x + 2x - 6$, como podemos ver na Figura 5.27.

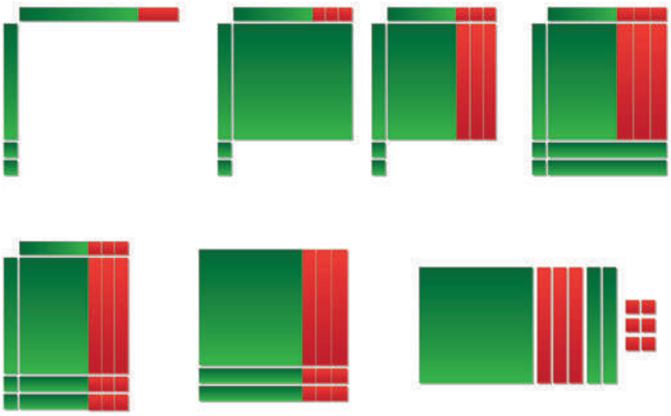


Figura 5.27: Resolução da atividade 3e do material confeccionado
Fonte: Autores

Observamos que é possível fazer cancelamento das peças, pois, temos $-3x$ e mais $2x$. Deste modo, depois dos procedimentos realizados, verificamos que a expressão $(x-3)(x+2)=x^2-x-6$, conforme mostra a Figura 5.28.

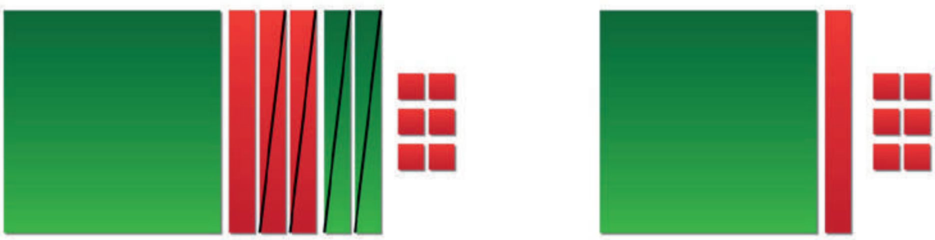


Figura 5.28: Resolução da atividade 3e do material confeccionado
Fonte: Autores

Na realização da atividade 4, para fatorar um trinômio do 2° grau da forma $ax^2 + bx + c$, com a, b e c inteiros e $a>0$ é necessário formar um retângulo com as peças que representam a expressão, em que algumas vezes teremos que realizar compensações. Quando tivermos os coeficientes b e c negativos, utilizaremos o mesmo procedimento da atividade 3, ou seja, iremos sobrepor as peças negativas nas peças positivas. Deste modo, retiraremos uma parte da peça positiva.

Atividade 4: (Fatoração) Fatorar as seguintes expressões utilizando as peças do material confeccionado:

a) $x^2 + 6x + 9$

Solução:

Para a realização desta atividade, selecionamos uma peça x^2, seis peças x e nove peças de uma unidade. Feito isso, devemos arranjá-las de modo a formar um retângulo, como podemos notar na Figura 5.29.

Depois de ter feito todos os procedimentos, podemos observar os lados da figura, e verificar que a fatoração de $x^2 + 6x + 9=(x + 3)^2$, como mostra a Figura 5.29.

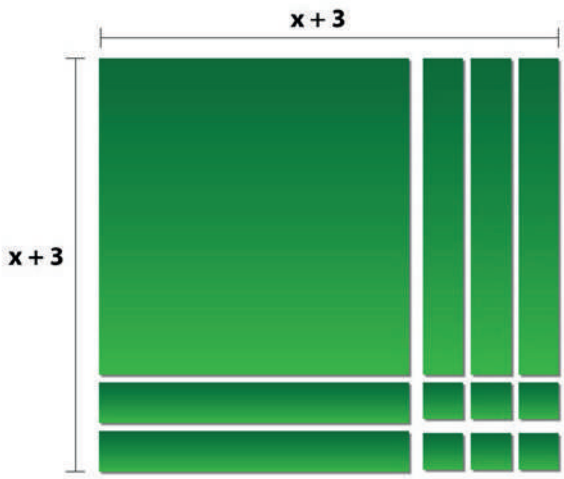


Figura 5.29: Resolução da atividade 4a do material confeccionado
Fonte: Autores

b) $x^2 - 4x + 4$

Solução:

Para a realização desta atividade, selecionamos uma peça x^2, quatro peças $-x$ e quatro peças que representam 1. Feito isso, devemos arranjá-las de modo a formar um retângulo, como podemos notar na Figura 5.30.

Como temos quatro peças negativas $(-x)$, primeiramente devemos sobrepor duas peças $-x$ horizontalmente à peça x^2. Em seguida, colocaremos as quatro peças de 1 unidade sobre as duas peças $-x$, conforme a Figura 5.30, de modo a permitir que as outras duas peças $-x$ sejam sobrepostas verticalmente à peça x^2. Vejamos a Figura 5.30.

Figura 5.30: Resolução da atividade 4b do material confeccionado
Fonte: Autores

Depois de ter feito todos os procedimentos, podemos observar os lados da figura e verificar que a fatoração de $x^2 - 4x + 4=(x-2)(x-2)=(x-2)^2$, já que duas unidades são retiradas de cada lado da peça x^2, como mostra a Figura 5.31.

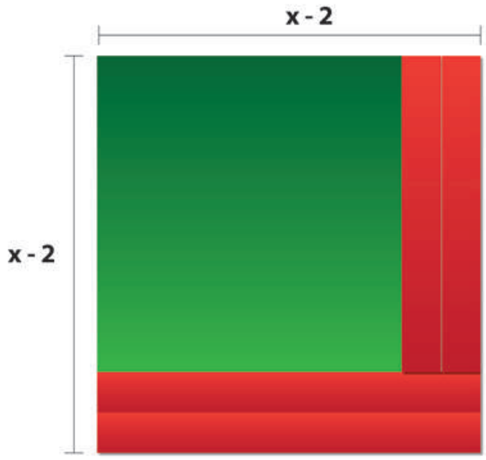


Figura 5.31: Resolução da atividade 4b do material confeccionado
Fonte: Autores

c) $x^2 - 4$

Solução

Para a realização desta atividade, selecionamos uma peça x^2 e quatro peças -1. Feito isso, devemos arranjá-las de modo a formar um retângulo. No entanto, utilizando apenas essas peças não é suficiente. Neste caso, utilizamos a lei da compensação, ou seja, acrescentamos as peças x e $-x$, e sobre o x acrescentado, sobrepomos uma das quatro peças que representam menos uma unidade, como podemos notar na Figura 5.32.

Figura 5.32: Resolução da atividade 4c do material confeccionado
Fonte: Autores

Podemos verificar que ainda faltam sobrepor três peças -1. Assim, utilizamos novamente a lei da compensação para completar o retângulo. Vejamos a Figura 5.33.

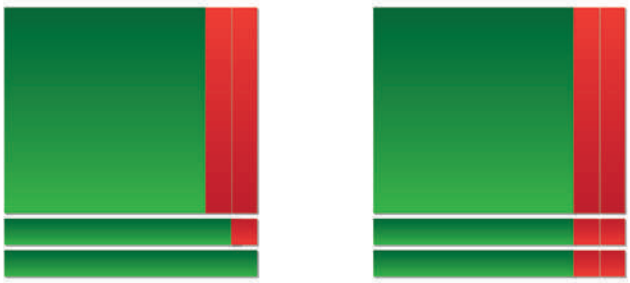


Figura 5.33: Resolução da atividade 4c do material confeccionado
Fonte: Autores

Após os procedimentos realizados, podemos verificar que a fatoração de $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, como mostra a Figura 5.34.

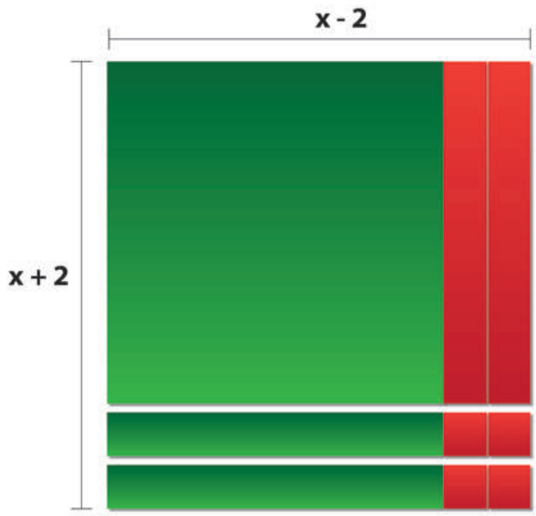


Figura 5.34: Resolução da atividade 4c do material confeccionado
Fonte: Autores

d) $x^2 + x - 2$

Solução

Para a realização desta atividade, selecionamos uma peça x^2, uma peça x e duas peças -1. Como o objetivo é formar um retângulo e com essas peças não será possível, precisaremos acrescentar uma peça x e uma peça $-x$, de modo que possamos sobrepor as duas peças -1 utilizando a lei da compensação.

Após os procedimentos realizados, podemos verificar que a fatoração de $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, como mostra a Figura 5.35:

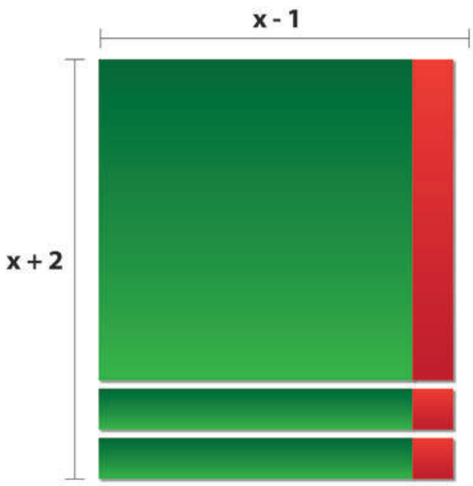


Figura 5.35: Resolução da atividade 4d do material confeccionado
Fonte: Autores

5.9 POTENCIALIDADE

Por meio desse material, o professor pode explorar os conceitos de fatoração, multiplicação, potenciação e a raiz da equação. Além disso, o conteúdo Produtos Notáveis, muitas vezes, deixa a desejar no sentido de apresentar aplicações práticas. Sendo assim, quando trabalhado desta forma, é possível que o aluno visualize a fatoração das expressões não apenas de forma mecânica com símbolos matemáticos, mas também por meio do material manipulável.

5.10 LIMITAÇÕES

Na utilização do kit Produtos Notáveis do Laboratório do Programa Brasil Profissionalizado, uma das limitações é não poder representar valores negativos, pois não temos opções de cores para representar as variáveis. Por exemplo, o oposto de x^2, ou seja, $-x^2$. Assim, não podemos fazer simplificações.

Já no material confeccionado, podemos utilizar valores negativos nas atividades. No entanto, sua limitação é o não uso de equações de terceiro grau, pois, apesar do material confeccionado obter espessura, esta não é tão significante de modo a ser utilizado.

Destaca-se também que tanto no material do Programa Brasil Profissionalizado quanto no confeccionado, não é possível trabalhar com coeficientes altos, pois, além das peças serem em número limitado, o material tem por objetivo introduzir o conceito e ajudar os alunos na sua compreensão e generalização com outras atividades.

Figura 6.1: Teodolito Óptico
Fonte: Autores

6.1 APRESENTAÇÃO

O teodolito é um instrumento óptico utilizado por agrimensores, topógrafos, engenheiros, arquitetos, entre outros, com a intenção de determinar distâncias inacessíveis, tanto verticais quanto horizontais. Pode ser usado, por exemplo, para medir a altura de um prédio ou largura de um rio, etc., usando triângulos retângulos e suas razões trigonométricas e leis dos senos e dos cossenos.

6.2 DESCRIÇÃO

O material é composto por:

- Uma bússola;
- Um laser;
- E o teodolito óptico.

6.3 OBJETIVOS

Ensinar a utilizar o Teodolito em conjunto com as Relações Trigonométricas para determinar medidas desconhecidas.

6.4 CONTEÚDOS ESTRUTURANTES

Grandezas e Medidas.

6.5 CONTEÚDOS BÁSICOS

Trigonometria e Relações Métricas.

6.6 ANO E NÍVEL SUGERIDOS

9º ano do Ensino Fundamental e Ensino Médio

6.7 COMO CONSTRUIR UM TEODOLITO CASEIRO

A seguir, apresentaremos a construção de um Teodolito caseiro e o seu manuseio.

Materiais necessários para a construção do Teodolito caseiro:

- Um transferidor de 180º de plástico
- 1 pedaço de cano de PVC de 20 mm de diâmetro com 30 cm de comprimento
- Cola Instantânea
- 1 pedaço de linha de costura ou barbante
- 1 pequeno peso

Construção

Fixe o transferidor centralizado na lateral do cano com a cola. Faça um furo no centro do transferidor. Passe a linha pelo furo e amarre o peso na extremidade da linha. O objetivo da linha é fazer um pêndulo para medir o ângulo.

Figura 6.2: Teodolito Caseiro
Fonte: Autores

6.8 DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

O primeiro passo consiste em mirar o teodolito na posição horizontal correspondente à base do que se deseja medir, por exemplo, uma árvore, um prédio etc., fixando o teodolito sobre uma base. Caso o terreno apresente desníveis, o teodolito deve ser utilizado afim de conseguir um plano horizontal (medir este desnível).

O segundo passo consiste em deslocar o teodolito focando o ponto extremo do objeto que está medindo. No caso do teodolito caseiro, o ângulo indicado no transferidor deve ser analisado com cuidado, pois o centro do transferidor estará em 90°, ou seja, o ângulo que se deseja medir deverá ser medido a partir de 90°, pois o pêndulo irá nivelar em 90°.

Conhecendo o valor do ângulo e a distância do ponto de medição até o objeto medido, basta utilizarmos a relação trigonométrica adequada para determinarmos a altura. Caso a medida seja feita por uma pessoa em pé, ressaltamos que a altura entre os olhos da pessoa e o chão deve ser acrescentada ao resultado da medição.

Daremos algumas sugestões de atividades para serem desenvolvidas.

Atividade 1: Calcular a altura de um prédio qualquer utilizando o teodolito como o representado na Figura 6.3.

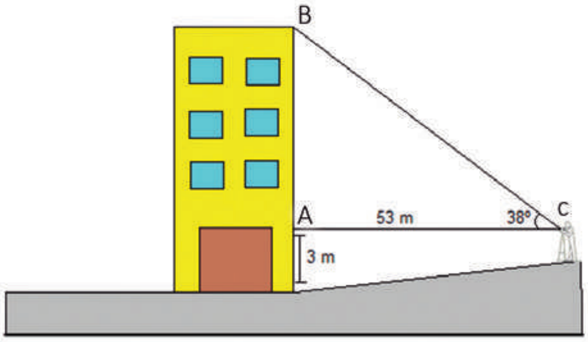


Figura 6.3: Altura de um prédio
Fonte: Autores

Solução:

Para medirmos a altura AB deste prédio, usamos o seguinte procedimento: fixamos o teodolito em um ponto C qualquer, depois verificamos com uma trena que a distância entre o prédio e o teodolito é de 53m.

Podemos observar na Figura 6.3 que a base do teodolito tem um aclive em relação à base do prédio. Deste modo, devemos alinhar o teodolito a zero grau na escala vertical, como mostra a Figura 6.4, e com o auxílio do laser fixar um ponto A no prédio. Com o teodolito alinhado à zero grau e deslocando-o verticalmente, verificamos que a angulação do ponto A ao ponto B é de 38° como mostra a Figura 6.5.

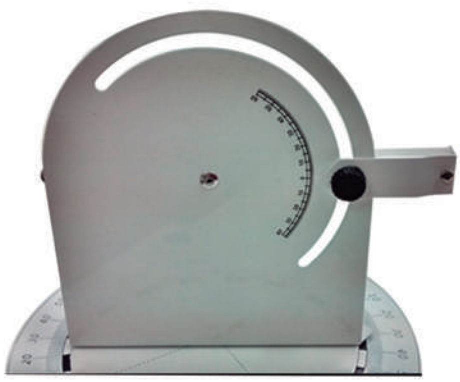


Figura 6.4: Teodolito Óptico
Fonte: Autores

Figura 6.5: Teodolito Óptico
Fonte: Autores

Na Figura 6.3, podemos observar que formou-se um triângulo retângulo, no qual temos dois ângulos, um de 90° e o outro de 38° verificado por meio do teodolito. Temos também a medida de um dos catetos que é 53 m. Tendo então a medida de um dos catetos e de dois ângulos, basta aplicarmos a seguinte relação trigonométrica: $\tan a = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$

Substituindo os valores encontrados, teremos:

$$\tan 38° = \frac{\overline{AB}}{53} \qquad 0{,}7813 = \frac{\overline{AB}}{53} \qquad \overline{AB} \cong 41{,}4m$$

Para encontrarmos a altura do prédio, devemos fazer $A_p = \overline{AB} + 3$, em que A_p é a altura do prédio, $\overline{AB}$ é a medida de A a B e 3 é a altura do ponto A em relação ao solo. Então

$$A_p = 41{,}4 + 3$$
$$A_p = 44{,}4m$$

Vale ressaltar que devido ao aclive não podemos considerar a altura do teodolito, mas sim a altura do ponto A, pois na altura em que está o teodolito não resultará em uma melhor aproximação da altura do prédio. No entanto, se estivesse em um terreno plano, calcularíamos apenas a altura do teodolito em relação ao solo.

Atividade 2: Calcular a largura de um rio utilizando o teodolito óptico.

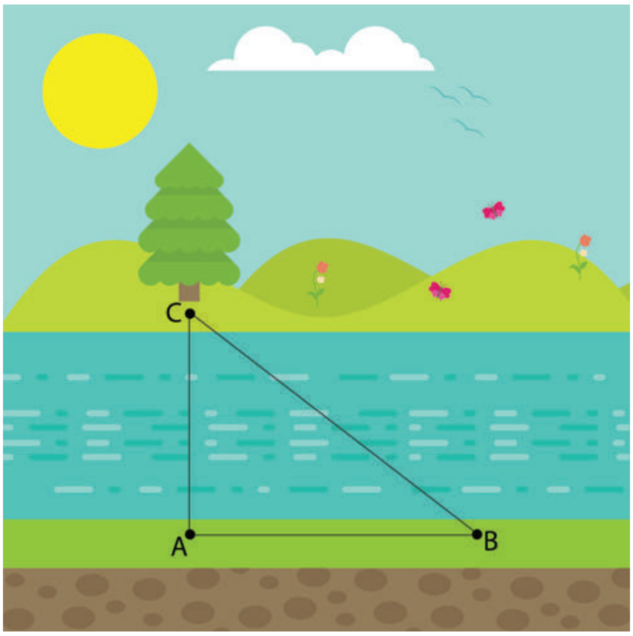


Figura 6.6: Largura de um rio
Fonte: Autores

Solução:

Para medir a distância AC, usamos os seguintes procedimentos: localizamos um ponto B de onde podemos observar, na margem oposta, a árvore C. Fixamos o teodolito no ponto B alinhando-o a zero grau (0°) na escala horizontal, como na Figura 6.7, em direção a A.

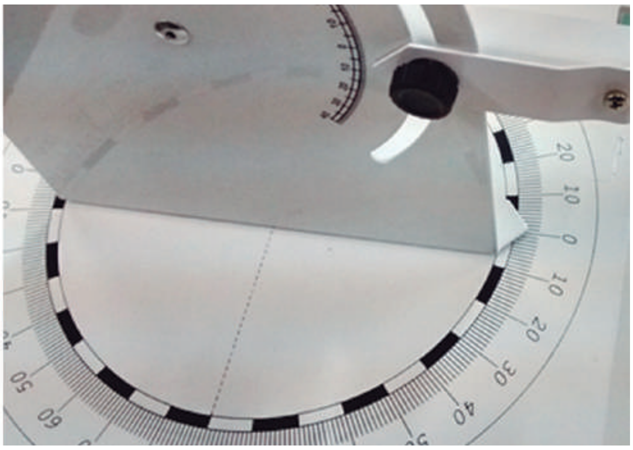


Figura 6.7: Teodolito Óptico
Fonte: Autores

Posteriormente, rotacionamos o teodolito do ponto *A* ao ponto *C*, verificando que a medida do ângulo $A\hat{B}C=55°$, como podemos observar na Figura 6.8.

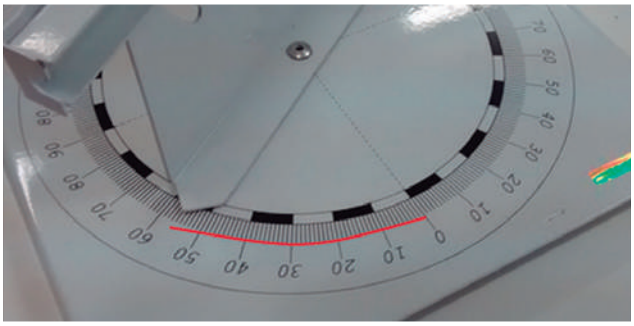


Figura 6.8: Teodolito Óptico
Fonte: Autores

Temos que o ângulo $B\hat{A}C=90°$ o ângulo $A\hat{B}C=55°$. Depois medimos com uma trena a distância do ponto A ao ponto B e constatamos que esta distância é de 50m. Veja a Figura 6.9.

Na Figura 6.9, podemos observar que formou-se um triângulo retângulo, no qual temos dois ângulos, um de 90° e o outro de 55° verificado por meio do teodolito. Temos também a medida de um dos catetos, que é 50 m. Tendo então a medida de um dos catetos e de dois ângulos, basta aplicarmos a seguinte relação trigonométrica: $tan\ a = \dfrac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$

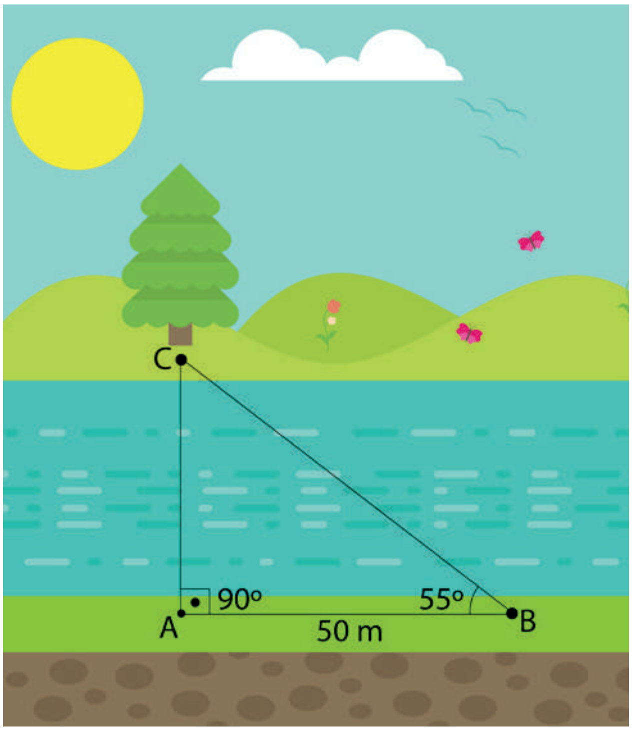


Figura 6.9
Fonte: Autores

Substituindo os valores encontrados teremos:

$$tan\ 55° = \frac{\overline{AC}}{50} \qquad 1{,}4281 = \frac{\overline{AC}}{50} \qquad \overline{AC} \cong 1{,}405m$$

Portanto, a largura do rio é de, aproximadamente, 71,405 *m*.

Atividade 3: Utilizando o teodolito óptico, calcule a distância entre duas árvores localizadas nos pontos A e C, respectivamente.

Solução:

Para medir a distância entre as duas árvores, usamos os seguintes procedimentos: localizamos um ponto B de onde podemos observar, na margem oposta, a árvore C. Fixamos o teodolito no ponto A alinhando-o a zero grau (0°) na escala horizontal (como na Figura 6.11) em direção a B.

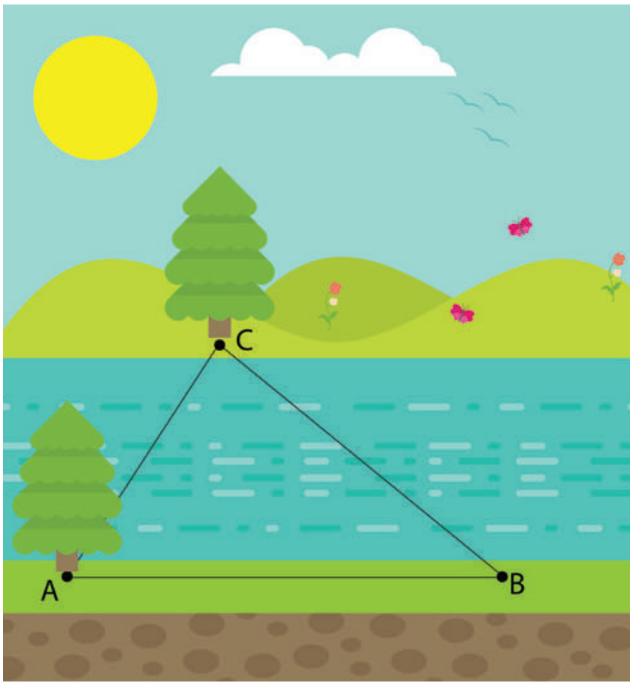


Figura 6.10: Distância entre duas árvores
Fonte: Autores

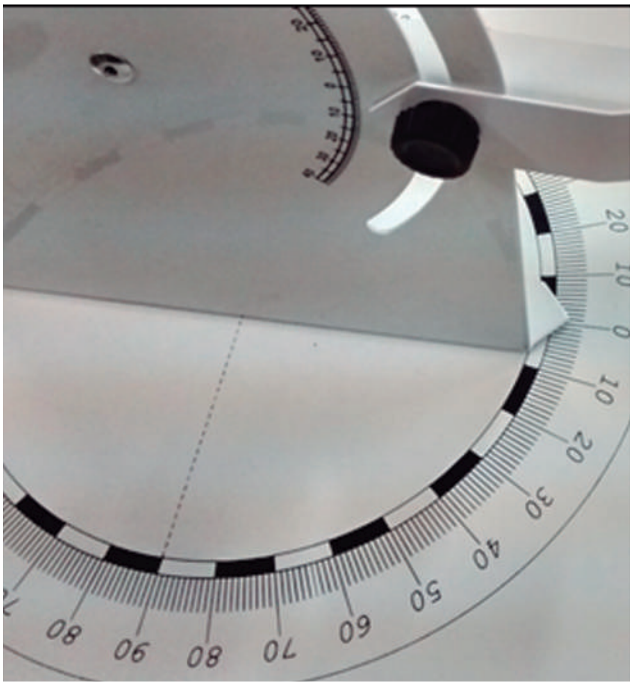


Figura 6.11: Teodolito Ótico
Fonte: Autores

Logo após, rotacionamos o teodolito horizontalmente do ponto B ao ponto C, verificando que a medida do ângulo $B\hat{A}C$=73°, como mostra a Figura 6.12.

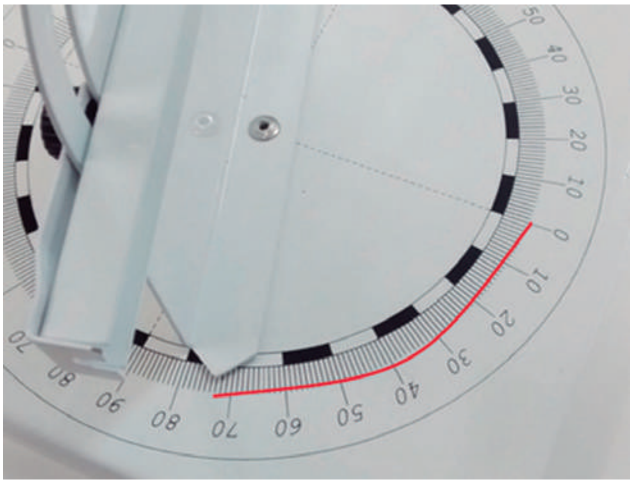


Figura 6.12: Teodolito Óptico
Fonte: Autores

Para calcularmos o ângulo $A\hat{B}C$, procedemos da mesma maneira realizada para encontrar o ângulo $B\hat{A}C$, ou seja, fixamos o teodolito no ponto B alinhando-o a zero grau na escala horizontal em direção ao ponto A, como mostra a Figura 6.8 e, posteriormente, rotacionamos o teodolito do ponto A ao ponto C, verificando que a medida do ângulo $A\hat{B}C$=55°, como podemos observar na Figura 6.13.

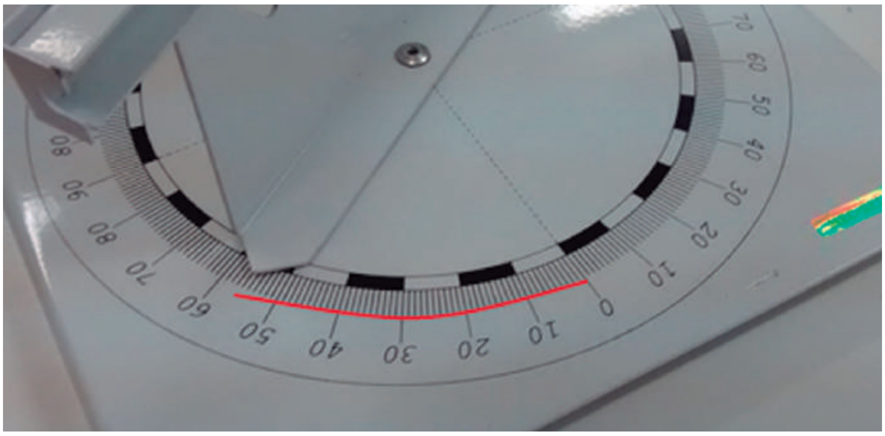


Figura 6.13: Teodolito Óptico
Fonte: Autores

Após encontradas dois ângulos, medimos com uma trena a distância do ponto A ao ponto B e constatamos que esta distância é de 60 m. Veja a Figura 6.14.

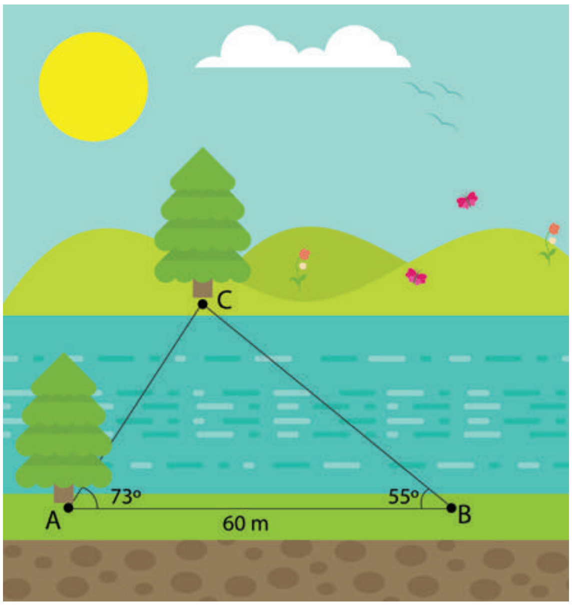


Figura 6.14: Distância entre duas árvores
Fonte: Autores

Podemos observar que temos a medida de dois ângulos e a medida de um lado do triângulo. Deste modo, aplicaremos a lei dos senos, que enuncia que em qualquer triângulo a medida dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Para aplicarmos essa lei, primeiramente encontramos o ângulo oposto da medida $\overline{AB}$, ou seja, o ângulo $\hat{C}$. Sabemos que em qualquer triângulo a soma dos ângulos internos é de 180°, de onde temos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

$$73° + 55° + \hat{C} = 180°$$

$$\hat{C} = 52°$$

Utilizando a lei dos senos, obtivemos:

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{60m}{\text{sen } \hat{C}}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } 55°} = \frac{60m}{\text{sen } 52°}$$

$$\frac{\overline{AC}}{0{,}81915} = \frac{60m}{0{,}78801}$$

Portanto, a distância é aproximadamente 62,4 m.

Atividade 4: Dois barcos *A* e *B* saíram de um rio *C* no mesmo horário. O barco *A* se move com uma velocidade constante de *70km/h* e o barco *B* com velocidade constante de *60km/h*. Sabendo que é possível avistá-los do porto *C*, qual é o ângulo formado por eles utilizando o teodolito? E qual é a distância entre os barcos após 1 hora de movimento?

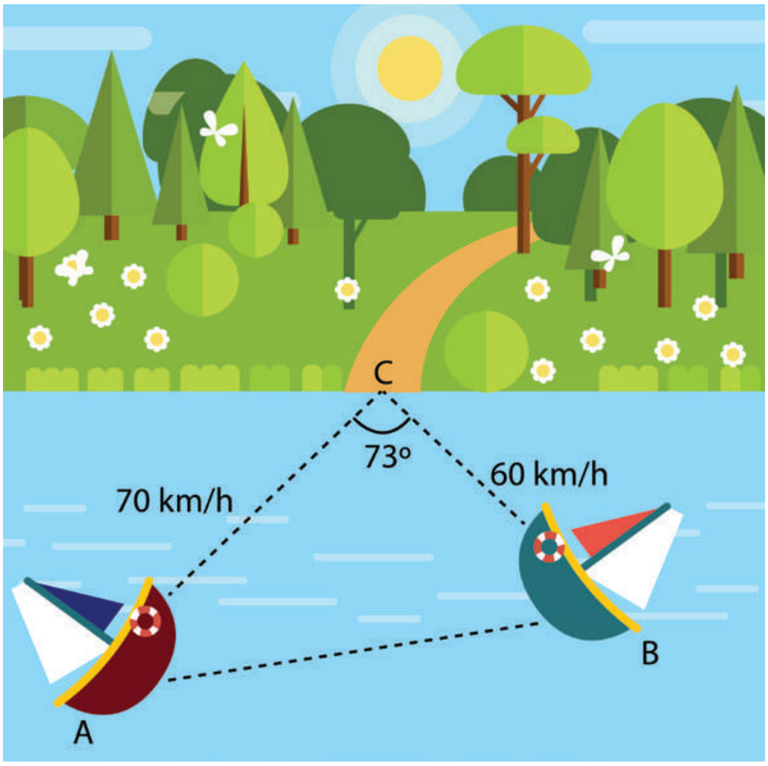


Figura 6.15: Distância entre os barcos
Fonte: Autores

Solução:

Para encontrarmos o ângulo formado pelos barcos, colocamos o teodolito no ponto *C*, alinhando-o a zero grau na escala horizontal em direção ao barco *A* e rotacionando-o em direção ao barco *B*, determinando o ângulo de 73°, como podemos observar na Figura 6.15.

Com o auxílio do teodolito, conseguimos calcular o ângulo formado pelos barcos. Deste modo, além do ângulo temos também as distâncias dos barcos em relação ao porto *C* após 1 hora, então aplicaremos a lei dos cossenos: em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados, menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles, ou seja, $(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 - 2\,(\overline{AC}.\overline{BC}.\cos(73°))$.

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 - 2\,(\overline{AC}.\overline{BC}.\cos(73°))$$
$$(\overline{AB})^2 = 70^2 + 60^2 - 2(70.60.0{,}29237)$$
$$\overline{AB} = 77{,}74 \text{ km}$$

Atividade 5: Calcular a altura de uma montanha utilizando o teodolito óptico.

Solução:

Para medirmos a altura $\overline{CD}$ da montanha, usamos o seguinte procedimento: fixamos o teodolito no ponto B e alinhamos a zero grau na escala vertical em direção ao ponto C, e o rotacionamos ao ponto D. Assim, verificamos que o ângulo $C\hat{B}D$=40°. Também temos que o ângulo $D\hat{C}B$=90°.

Podemos notar na Figura 6.16 que a distância $\overline{BC}$ é inacessível. Deste modo, para podermos calcular, devemos recuar ou afastar o teodolito, partindo do ponto B, a uma certa distância que podemos medir. Neste exemplo optamos em recuar o teodolito e, com o auxílio de uma trena, verificamos que a distância recuada é de 100 m em relação ao ponto B. Depois, verificamos com o auxílio do teodolito que o ângulo $C\hat{A}D$ = 20°, como podemos ver na Figura 6.16.

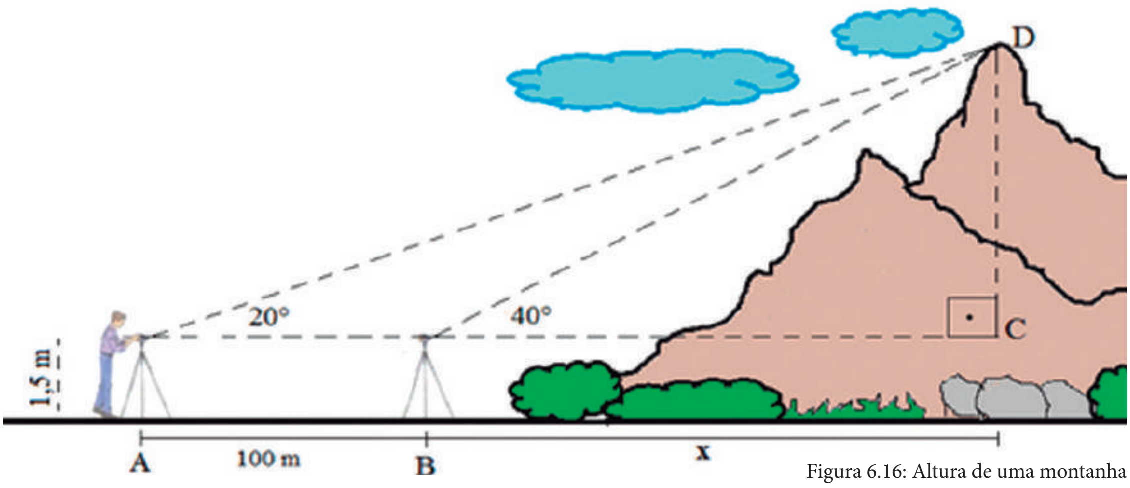


Figura 6.16: Altura de uma montanha
Fonte: Autores

Da Figura 6.16, podemos observar que:

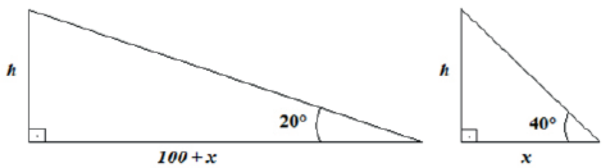


Figura 6.17: Razões trigonométricas
Fonte: Autores

$$\tan 20° = \frac{h}{x + 100}$$

$$0,3640 = \frac{h}{x + 100}$$

$$\tan 40° = \frac{h}{x}$$

$$0,8391 = \frac{h}{x}$$

$$h = 0,8391x$$

Substituindo $h = 0{,}8391x$ em $0{,}3640 = \dfrac{h}{x+100}$

Temos:

$$0{,}3640 = \frac{0{,}8391x}{x + 100}$$

$$36{,}40 = 0{,}8391x - 0{,}3640x$$

$$0{,}4751x = 36{,}40$$

$$x = 76{,}62 \text{ m}$$

Como:

$$h = 0{,}8391x \text{ e } x = 76{,}62$$

$$h = 64{,}29 \text{ m}$$

6.9 POTENCIALIDADE

Por meio deste material é possível que o aluno calcule medidas inacessíveis aplicando as relações trigonométricas em atividades com referência à realidade, além de possibilitar ao sujeito o manuseio de instrumentos de medida abordando conteúdos como Sistemas de Medidas e Geometria.

6.10 LIMITAÇÕES

A limitação deste material é que na escala vertical o ângulo corresponde no máximo a 40°. Desta forma, para calcular a altura de um prédio, por exemplo, devemos deixar uma grande distância do teodolito em relação ao prédio e, com isso, dificulta-se a visualização do reflexo do laser, e dependendo do local não é possível deixar a distância necessária pela falta de espaço. Tal fato se deve ao aparelho ser elaborado para uso escolar e não profissional. É importante explicar para os alunos que os aparelhos de uso profissional possibilitam marcações muito maiores e mais precisas do que as exemplificadas neste trabalho.

BARBOSA, E; BORRALHO, A. Exploração de Padrões e Pensamento Algébrico. In: VALE, I; BARBOSA, A. (Org.) *Padrões*: Múltiplas Perspectivas e contextos em Educação Matemática. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, 2009, p. 59-68.

FANTI, Ermínia de Lourdes Campello; KODAMA, Hélia Matiko Yano; MARTINS, Ana Claúdia Cossini; CUNHA, Ana de Fátima C.S.. **Ensinando fatoração e funçoes quadráticas com o apoio de material concreto e informática**. Disponível em: <http://www.unesp.br/prograd/PDFNE2006/artigos/capitulo2/fatoracao.pdf>. Acesso em: 01 de Maio de 2014.

GUADAGNINI, Miriam do Rocio. **O uso da fatoração na resolução de equações do 2º grau por alunos do 9º ano do ensino fundamental**. 2013. 151 f. Dissertação (Mestrado)-Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mato Grosso do Sul, 2013. Disponível em:<https://sistemas.ufms.br/sigpos/portal/trabalhos/buscarPorCurso/page:5/cursoId:91 >. Acesso em: 07 de junho de 2016.

KALEFF, Ana Maria M. R.; REI, Dulce Monteiro; GARCIA, Simone dos Santos. **Quebra-cabeças geométricas e formas planas**. 2. ed. Niterói: EDUFF, 1997.

LAMAS, Rita de Cássia; MAURI, Juliana. **O Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo com material emborrachado**. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~iole/oteoremadepitagoras.pdf>. Acesso em: 27 de novembro de 2014

MANOEL, Luís Ricardo da Silva. **Torre de Hanói**. Disponível em:<http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/torre_de_hanoi.pdf>. Acesso em: 17 de Dezembro de 2014.

WATANABE, Renate. *Vale para 1, para 2, para 3,...* . Vale sempre? In: **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, nº 09, p. 32–38, 2º sem. 1986.

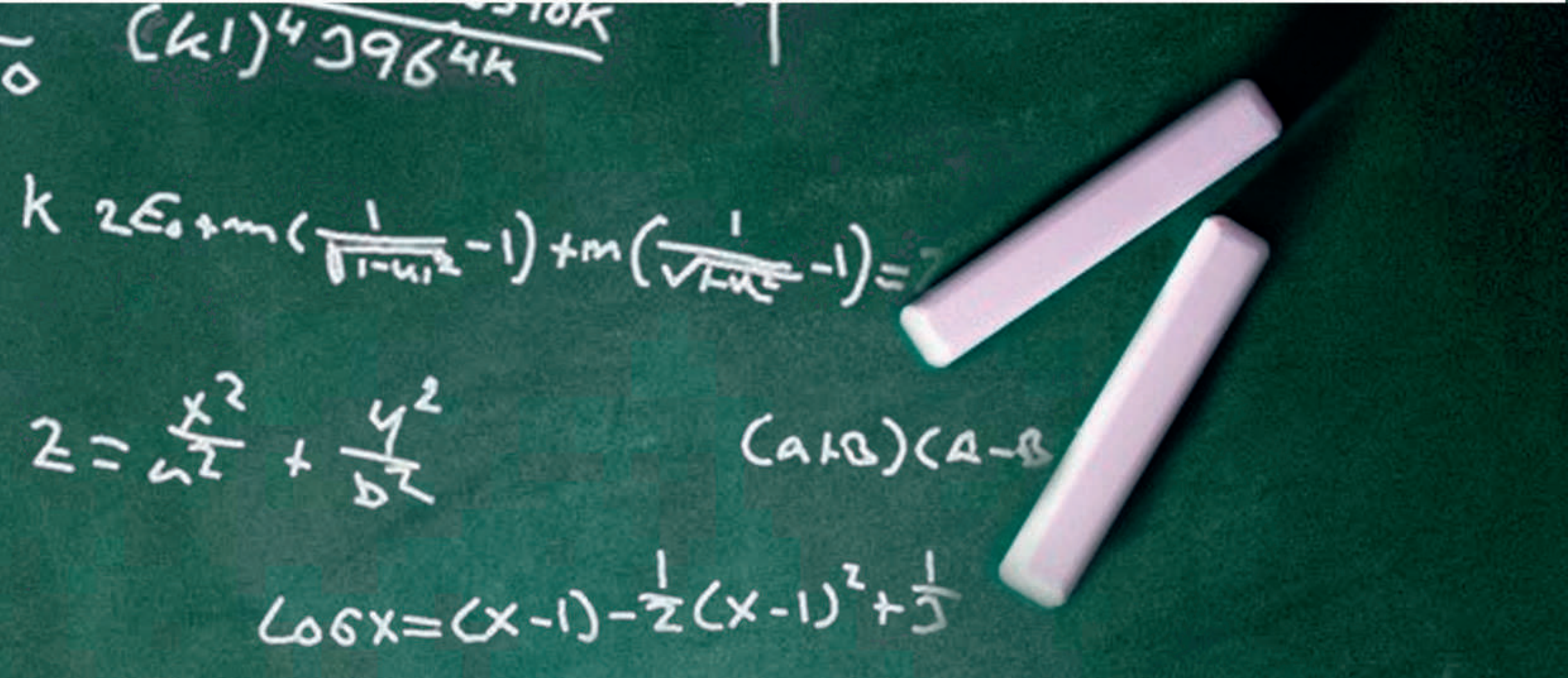
Karina Dezilio graduada em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná – Campus de Campo Mourão. Participou do Projeto de Iniciação Científica, intitulado “Um Estudo acerca de Materiais do Laboratório de Matemática”, que foi desenvolvido no biênio de 2014/2015 orientado pela professora Me. Valdete dos Santos Coqueiro e coorientado pela professora Dra. Mariana Moran.

Mariana Moran possui graduação em Matemática, Mestrado e Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá. Atualmente, é professora Adjunta da Universidade Estadual do Paraná – Campus de Campo Mourão. É membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática de Campo Mourão – GEPEMCAM.

Suzana Domingues da Silva graduada em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná – Campus de Campo Mourão. Participou do Projeto de Iniciação Científica, intitulado “Potencialidades e limitações de materiais do Laboratório de Matemática”, que foi desenvolvido no biênio de 2014/2015 orientado pela professora Me. Valdete dos Santos Coqueiro e coorientado pela professora Dr. Mariana Moran.

Valdete dos Santos Coqueiro possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá e Especialização em Educação Matemática pela Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão. Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia pela Universidade Federal do Paraná. É professora Assistente do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná - Campus de Campo Mourão, onde desenvolve projeto de extensão relacionado a Laboratório de Ensino de Matemática.

Valdir Alves possui Graduação em Ciências com Habilitação em Matemática pela Faculdade Integrada Rui Barbosa - Andradina SP, Especialização em Metodologia de Ensino nas Séries Iniciais pela Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão – PR, Especialização em Modelagem Matemática pela FECILCAM/UNICAMP – SP e Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia pela Universidade Federal do Paraná. É professor Assistente do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná - Campus de Campo Mourão, onde desenvolve projeto de extensão relacionado Metodologia de Ensino e Laboratório de Ensino de Matemática.



O Manual Didático elaborado aborda explicações dos seguintes materiais que compõem o Laboratório de Matemática: Kit de Probabilidade, Torre de Hanói, Kit Teorema de Pitágoras, Kit Relações Métricas no Triângulo Retângulo, Kit Produtos Notáveis e Teodolito Ótico. Tal manual é composto por um roteiro seguindo as seguintes diretrizes para cada material didático: apresentação do material; descrição; objetivos; conteúdos estruturantes; conteúdos básicos; expectativas de aprendizagem; ano e nível sugeridos; cuidados necessários; desenvolvimento da atividade; potencialidades e limitações.

Espera-se que este material possa auxiliar os professores e futuros professores com relação ao uso dos materiais didáticos do Laboratório de Matemática, bem como contribuir com os processos de ensino e aprendizagem dos alunos. Também espera-se que o manual possa servir de apoio para escolas que não possuem o Laboratório, uma vez que serão sugeridas formas de construção de alguns dos materiais.