FORMAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

Propostas de ensino aos anos iniciais e finais do ensino fundamental

MARCELO CARLOS DE PROENÇA
Organizador

EDITORA FECILCAM

ISBN 978-65-88090-00-8

EDITORA **FECILCAM**

CNPJ: 75.365.387/0001-89
Av. Comendador Norberto Marcondes, 733
Campo Mourão, PR, CEP 87303-100
(44)3518-1838
campomourao.unespar.edu.br/editora
editoradafecilcam@yahoo.com.br

Capa, Projeto Gráfico e Diagramação: Hey!Design

F974 Formação de conceitos matemáticos : propostas de ensino aos anos iniciais e finais do ensino fundamental / Marcelo Carlos de Proença, organizador. Campo Mourão-Pr.: Editora Fecilcam, 2020.
173 p. : il. color.

ISBN 978-65-88090-00-8

1. Matemática - Ensino fundamental. 2. Educação matemática – Séries iniciais. I. Proença, Marcelo Carlos, org. II. Título.
CDD - 23 ed. 372.7

Marinalva Aparecida Spolon Almeida -9/1094

As imagens ilustrativas utilizadas neste livro foram obtidas a partir do site **shutterstock.com**

MARCELO CARLOS DE PROENÇA
Organizador

FORMAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

Propostas de ensino aos anos iniciais e finais do ensino fundamental

EDITORA **FECILCAM**

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A elaboração do presente livro tem como uma de suas preocupações a questão que envolve o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos e, dessa forma, apresentar propostas que orientem o trabalho em sala de aula com fim na formação desses conceitos. Sabe-se que o ensino de Matemática no Ensino Fundamental tem como um de seus objetivos o de favorecer a compreensão de conceitos, bem como de procedimentos matemáticos, aos alunos, de modo que eles possam utilizá-los em diversas situações como as de resolver problemas. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997, 1998) já indicavam a importância de, em sala de aula, favorecer essa compreensão, bem como levar os alunos a desenvolverem capacidades de resolução de problemas.

Com a atual Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), relativa à Educação Infantil e Ensino Fundamental (anos iniciais (1.º ao 5.º anos) e anos finais (6.º ao 9.º anos)), passa-se a tê-la como referência ao ensino de Matemática. Nesse documento, é notório o foco em conteúdos matemáticos em cada ano escolar, seguido de um rol de habilidades a serem desenvolvidas nos alunos. Porém, não se apresenta uma indicação clara de como seguir, por exemplo, o trabalho em sala de aula que aborde a formação dos conceitos, necessários à resolução de problemas.

Ao contrário disso, o ensino feito de forma fundamentada teoricamente é necessário justamente porque a aprendizagem de conceitos matemáticos pelos alunos depende de um direcionamento à formação de conceitos que implica em levá-los, sobretudo, a conhecer suas características, seus exemplos, a diferenciar de outros conceitos, bem como a saber utilizá-los na resolução de problemas. É o caso, por exemplo, de se saber diferenciar um quadrado de um cubo ou um triângulo de uma pirâmide de base quadrada, justamente porque quadrado e triângulo são figuras planas, cujas características diferem das de cubo e pirâmide que são figuras espaciais. Assim, apesar de quadrado formar as faces do cubo, e triângulo, as faces laterais de uma pirâmide de base quadrada, implicam em conceitos diferentes. Também podemos falar das diferenças entre conceitos como o de equação, inequação e expressão algébrica, os quais diferem em suas características específicas, sendo, respectivamente, a de possuir sinal de igualdade, a de possuir sinal de desigualdade, e ser formada apenas de letras e que podem conter números.

Dessa forma, o presente livro, intitulado *Formação de Conceitos Matemáticos: propostas de ensino aos anos iniciais e finais do ensino fundamental*, visa apresentar algumas propostas de ensino para serem desenvolvidas em sala de aula, na escola, buscando favorecer a compreensão e formação de conceitos matemáticos nos alunos. Para tal, está estruturado em sete capítulos, sendo que os três primeiros são referentes a conteúdos dos anos iniciais do ensino fundamental e os quatro últimos a conteúdos dos anos finais do ensino fundamental. As propostas tomam como base os conteúdos e habilidades indicados na BNCC (BRASIL, 2017) e, dessa forma, os direcionamentos são feitos com base nos respectivos pressupostos teóricos adotados.

No capítulo 1, intitulado "O ensino do campo conceitual aditivo no 3.º ano do ensino fundamental: algumas discussões teóricas e didático-metodológicas", o autor Richael Silva Caetano apresenta uma proposta de ensino de Matemática para alunos do 3.º ano do Ensino Fundamental, visando desenvolver uma habilidade elencada na BNCC, referente a "*problemas de adição e subtração*". Buscou-se – enquanto fundamentação teórica – a teoria dos campos conceituais, desenvolvida por Gérard Vergnaud, na qual se discute o campo conceitual aditivo. Além dessa teoria, a referida proposta de ensino 'alicerça-se' em alguns 'elementos' teóricos da Epistemologia Genética, teoria essa que defende a importância da efetiva ação do aluno ('sobre o objeto'/situação-problema matemática) à construção-aprendizagem da Matemática.

No capítulo 2, intitulado "O ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico face às concepções e práticas de professores dos anos iniciais: um novo olhar", os autores Roseli Regina Fernandes Santana, Luciane de Castro Quintiliano e Nelson Antonio Pirola apresentam uma proposta de ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental, apresentando algumas possibilidades de ensino por meio de tarefas que podem potencializar o desenvolvimento de tal pensamento matemático ainda nos primeiros anos de escolaridade pautado em informações cedidas por professores dos anos iniciais sobre os seus saberes para o ensino do desenvolvimento do pensamento algébrico, a fim de nortear e embasar percursos formativos, objetivando o aprimoramento da prática docente acerca da temática.

No capítulo 3, intitulado "O processo de abstração do conceito de polígono: uma proposta de ensino para o 5.º ano do ensino fundamental", o autor Marcelo Carlos de

Proença apresenta uma proposta de ensino a ser desenvolvida no 5.º ano do Ensino Fundamental para tratar da formação do conceito de polígono, conteúdo este indicado na BNCC (BRASIL, 2017), tendo como objetivo favorecer aos alunos a construção da abstração desse conceito e, portanto, favorecer sua compreensão. Adota-se, assim, como fundamento para a prática pedagógica, o pressuposto teórico de Dreyfus (1991), referente aos processos do pensamento matemático avançado, tendo como principal o processo de abstração, evidenciando as etapas de ensino para se atingir essa abstração.

No capítulo 4, intitulado "Ensino-aprendizagem de inequações: uma proposta envolvendo congruência semântica", os autores Wilian Barbosa Travassos e Marcelo Carlos de Proença apresentam uma proposta de ensino e aprendizagem do conteúdo de inequações do primeiro grau com uma variável via sequência de atividades que favoreçam o reconhecimento do objeto matemático inequação. Devido a diversidade representacional que um conceito pode assumir, sobretudo, sua diversidade linguística que o representa quando se trata do registro Língua Natural, elencamos oito questões, elaboradas com foco na congruência semântica, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de modo a propiciar ao aluno o reconhecimento e coordenação (conversão) do conceito em diferentes tipos de enunciados de exercícios/problemas. Por fim, apresentamos dois problemas contextualizados para serem abordados, tendo em vista levar os alunos a ampliarem a compreensão do uso de inequações.

No capítulo 5, intitulado "Uma proposta de tarefas para o ensino de geometria utilizando o Tangram como um registro figural", as autoras Mariana Moran e Valdete dos Santos Coqueiro apresentam uma proposta de questões exploratórias e tarefas para o trabalho com figuras geométricas planas, explorando a nomeação e a comparação de polígonos, suas propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos num contexto do Ensino Fundamental. A escrita do trabalho foi pautada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, utilizando o Tangram como forma de registro figural Material Manipulável (MM) e *Software* de Geometria (SG). As tarefas propostas visam a construção desses conceitos, e também sugestões de aplicações de conteúdos de Geometria.

No capítulo 6, intitulado "Desvendando senhas: um estudo sobre conceitos de análise combinatória e probabilidade", as autoras Daniela da Rosa Teza e Maria Lucia Panossian apresentam uma proposta de ensino que trata da ideia de que senhas em geral, combinações de 1 e 0 e a segurança no mundo virtual têm algo em comum:

conceitos de análise combinatória e a probabilidade. No âmbito escolar, esses conceitos matemáticos se concretizam na forma de conteúdos presentes no ensino, atualmente regidos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Considerando o que vem sendo proposto pela BNCC, e também os estudos sobre o movimento histórico e lógico da combinatória, este capítulo apresenta uma situação desencadeadora de aprendizagem enquanto elemento da Atividade Orientadora de Ensino.

No capítulo 7, intitulado “A Modelagem Matemática no ensino-aprendizagem: uma proposta de ensino para grandezas e medidas nos 8º. e 9º. anos do ensino fundamental”, os autores Lilian Milena Ramos Carvalho, Eduardo Francisco de Oliveira, Edson Rodrigues Carvalho apresentam uma proposta de ensino com base na metodologia de modelagem matemática para favorecer o aprendizado da unidade temáticaGrandezas e Medidas, entre outras, nos anos finais do ensino fundamental. O desenvolvimento da proposta é baseado no conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis a todos os estudantes, previsto na Base Comum Curricular (BNCC, 2017), com destaque para as habilidades relacionadas aos objetos de conhecimento dessa unidade temática.

Diante do que o leitor vai encontrar neste livro, esperamos que futuros professores, professores e pesquisadores das áreas de Pedagogia e de Licenciatura em Matemática e também demais interessados possam fazer uso das propostas de ensino sugeridas de modo que isso permita clarificar as ideias para poder fundamentar práticas de ensino de sala de aula e, assim, abordar a formação de conceitos matemáticos, levando, consequentemente, os alunos a uma aprendizagem significativa. Por fim, destacamos que se pode fazer uso dos pressupostos teóricos apresentados nos diversos capítulos para elaboração de aulas envolvendo outros conteúdos matemáticos.

Capítulo 1

O ENSINO DO CAMPO CONCEITUAL ADITIVO NO 3º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: ALGUMAS DISCUSSÕES TEÓRICAS E DIDÁTICO-METODOLÓGICAS

Richael Silva Caetano

INTRODUÇÃO

O presente capítulo apresenta uma proposta de ensino de Matemática para o 3.º ano do Ensino Fundamental na qual se 'contempla' uma das **habilidades**[1] elencadas na Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**) (BRASIL, 2017). Essa proposta foi elaborada no intuito de contribuir com a prática pedagógica desenvolvida pelo professor em sala de aula, profissional esse responsável pela 'materialização'/'execução' do currículo proposto pela rede de ensino pública (e/ou privada) a qual pertence. Contudo, antes de apresentar tal proposta, bem como o referencial teórico que a subsidia, discutir-se-á brevemente sobre a BNCC.

A Base Nacional Comum Curricular constitui um documento normativo[2] que define/delimita um conjunto de **aprendizagens essenciais** a serem construídas pelos alunos durante a Educação Básica, da Educação Infantil[3] ao Ensino Médio. Para tanto,

1 Segundo a BNCC, as "**habilidades** expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares." (BRASIL, 2017, p. 29, **grifo do autor**).

2 Faz-se oportuno salientar que, de 'posse' do referido documento, caberá às redes de ensino e às escolas particulares a construção dos 'seus' currículos considerando as aprendizagens essenciais definidas na BNCC, "passando, assim, do plano normativo propositivo para o plano da ação e da gestão curricular que envolve todo o conjunto de decisões e ações definidoras do currículo e de sua dinâmica." (BRASIL, 2017, p. 20).

3 No caso da Educação Infantil, a BNCC define seis **direitos de aprendizagem e desenvolvimento** (conviver, brincar, participar, explorar, expressar e conhecer-se) 'distribuídos' em cinco **campos de experiência** (1. O eu, o outro e o nós, 2. Corpo, gestos e movimentos, 3. Traços, sons, cores e formas, 4. Escuta, fala, pensamento e imaginação e 5. Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações). Em cada campo são definidos **objetivos de aprendizagem e desenvolvimento** organizados em três grupos considerando-se as seguintes faixas etárias: i) bebês (0 a 1 ano e 6 meses); ii) crianças bem pequenas (1 ano e 7 meses a 3 anos e 11 meses); iii) crianças pequenas (4 anos a 5 anos e 11 meses).

"as **aprendizagens essenciais** definidas na BNCC devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez **competências gerais**[4], que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento." (BRASIL, 2017, p. 9, **grifo nosso**). Nesse documento, o conceito/constructo **competência** é definido

> como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2017, p. 8).

Ao 'orientar-se' para/pelo desenvolvimento de competências, inclusive de **competências específicas** para cada um dos **componentes curriculares**, a BNCC 'realiza' uma

> indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho) [...]. (BRASIL, 2017, p. 13).

Para garantir o desenvolvimento das referidas **competências específicas**, a BNCC apresenta/delimita, para cada um dos componentes curriculares, um conjunto de **habilidades** relacionadas a diferentes **objetos de conhecimento**. Tais objetos de conhecimento (isto é, conteúdos, conceitos e processos) estão organizados/distribuídos em **unidades temáticas**. Segundo a BNCC:

> Respeitando as muitas possibilidades de organização do conhecimento escolar, as **unidades temáticas** definem um arranjo dos **objetos de conhecimento** ao longo do Ensino Fundamental adequado às especificidades dos diferentes componentes curriculares. Cada unidade temática contempla uma gama maior ou menor de objetos de conhecimento, assim como cada objeto de conhecimento se relaciona a um número variável de habilidades, [...]. (BRASIL, 2017, p. 29, **grifos do autor**).

No caso da Matemática para o Ensino Fundamental, por exemplo, há cinco **unidades temáticas**, a saber: 1) **Números**, 2) **Álgebra**, 3) **Geometria**, 4) **Grandezas e Medidas** e 5) **Probabilidade e Estatística**. Na presente proposta de ensino, a seguinte habilidade 'contemplada' – e apresentada adiante – pertence à unidade temática 'Números':

---

4 Segundo a BNCC, as 10 competências gerais da Educação Básica "inter-relacionam-se e desdobram-se no tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, nos termos da LDB." (BRASIL, 2017, p. 8-9).

> "**(EF03MA06**[5]**)** Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades, utilizando diferentes estratégias de cálculo exato ou aproximado, incluindo cálculo mental." (BRASIL, 2017, p. 287).

Conforme a BNCC, tal habilidade 'relaciona-se' ao seguinte **objeto de conhecimento**:

> "Problemas envolvendo significados da adição e da subtração: juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades." (BRASIL, 2017, p. 286).

Pelo fato desse objeto de conhecimento referir-se aos '*problemas envolvendo os diversos significados da adição e da subtração*', então, na seção seguinte abordar-se-á um possível referencial teórico (a teoria dos campos conceituais, em específico, o campo conceitual aditivo) que possibilita compreender, do ponto de vista 'psicológico' (e, de certo modo, didático) como se dá a construção do referido objeto pelo aluno. Além desse referencial teórico, apresentar-se-á uma breve síntese da Epistemologia Genética, tendo em vista a contribuição da mesma para a fundamentação da teoria dos campos conceituais, bem como da presente proposta de ensino.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: BREVES CONSIDERAÇÕES SOBRE A EPISTEMOLOGIA GENÉTICA E A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Epistemologia Genética – teoria elaborada por Jean Piaget[6] e colaboradores – visa explicar a gênese (origem) e o desenvolvimento do conhecimento, desde as ações sensório-motoras até às estruturas formais do pensamento (PIAGET, 2007). Ao defender que o conhecimento é produto de uma construção (histórica) realizada ativamente pelo sujeito ao **interagir** (relacionar-se) com o objeto (meio) (PIAGET,

---

5 Conforme o código adotado pela BNCC, a habilidade **EF03MA06** deve ser 'lida'/'compreendida' como sendo a sexta habilidade (**06**) de Matemática (**MA**) para o terceiro ano (**03**) do Ensino Fundamental (**EF**). Em relação à organização/distribuição/ordenamento das habilidades, a BNCC pontua o seguinte: "Cumpre destacar que os critérios de organização das habilidades na BNCC (com a explicitação dos objetos de conhecimento aos quais se relacionam e do agrupamento desses objetos em unidades temáticas) expressam um arranjo possível (dentre outros). Portanto, os agrupamentos propostos não devem ser tomados como modelo obrigatório para o desenho dos currículos." (BRASIL, 2017, p. 275).

6 Especialista em psicologia evolutiva e Epistemologia Genética, filósofo, lógico, biólogo e educador, Jean William Fritz PIAGET nasceu em Neuchâtel, Suíça, em 09 de agosto de 1896, e morreu em Genebra a 16 de setembro de 1980.

1987), tal teoria opõe-se ao empirismo e ao inatismo[7]. Para este processo de construção do conhecimento (e num '**movimento contínuo**'[8]), o sujeito vale-se de duas invariantes funcionais: a **assimilação** e a **acomodação**. A assimilação é compreendida como sendo uma incorporação ('interpretação') do objeto às estruturas (esquemas de ação ou conceituais) já construídas pelo sujeito. Por sua vez, a acomodação representa a modificação (transformação) de tais estruturas pelo fato das mesmas não terem sido suficientes à assimilação do objeto (meio). Assim, 'acomoda-se' para melhor apreender/compreender o objeto (meio).

Através do **equilíbrio** entre tais invariantes, faz-se possível a **adaptação** (PIAGET, 1998b). Vale ressaltar que a adaptação, em movimento indissociável com a **organização**, possibilita ao sujeito desenvolver-se construindo, assim, estruturas cada vez mais complexas. Estruturas mais complexas possibilitam uma melhor compreensão/ação sobre a realidade. O equilíbrio, ou o mecanismo/'movimento' de **equilibração**[9], é entendido por Piaget (2001, p. 88) como uma "compensação proveniente das atividades do sujeito em resposta às perturbações exteriores.", sendo tais perturbações provenientes de problemas enfrentados pelo sujeito. Logo, o problema – ao desencadear um **desequilíbrio** – impulsiona o sujeito a agir sobre o objeto (assimilando-o e ou acomodando-o) visando a sua superação por meio de um **reequilíbrio** (PIAGET, 1976). Faz-se importante pontuar que tal processo desequilíbrio/reequilíbrio demanda

7 Para o empirismo, a pressão exercida pelo objeto (meio) sobre o sujeito garante a 'impressão-cópia' do conhecimento em sua mente, no qual o papel desse sujeito é o de um receptor (passivo). Já o inatismo concebe que o sujeito nasce com o conhecimento pré-formado, sendo apenas necessário o 'desabrochar' desse conhecimento.

8 Segundo a Epistemologia Genética, uma construção 'anterior' 'abre' as possibilidades para uma construção 'posterior', sendo tal construção 'posterior' mais complexa que a precedente. Com exceção dos primeiros esquemas construídos pelo recém-nascido que 'alicerçam-se' no esquema-reflexo já dado pela hereditariedade (a sucção), todos os demais são construídos por meio de um 'movimento contínuo' constituído pela assimilação-acomodação. Assim, torna-se importante considerar os conhecimentos anteriores (prévios) dos alunos – enquanto um possível 'ponto de partida' – na/durante a proposição das situações de ensino.

9 Observam-se, também, neste mecanismo de equilibração os seguintes 'fatores'/elementos: 1.º a **dialética** – considerada o aspecto inferencial da equilibração – caracteriza-se pela construção de novas interdependências (estabelecimento de relações entre diversos sistemas) (PIAGET *et al*., 1996); 2.º a **abstração reflexionante** – considerada um dos processo mais gerais do equilíbrio – consiste na coordenação das ações do sujeito (PIAGET *et al*., 1995). Tal abstração, enquanto processo, é constituída pelo "**reflexionamento**" (*réfléchissement*), ou seja, a projeção (como através de um refletor) sobre um patamar superior daquilo que foi tirado do patamar inferior (por ex., da ação à representação) e, de outro lado, uma "**reflexão**" (*réflexion*), entendida esta como ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior. (PIAGET *et al*., 1995, p. 274-275, **grifo nosso**)".

considerável tempo e uma intensa atividade (ação física e cognitiva) por parte do sujeito, daí o ponto central da Epistemologia Genética defender a imprescindibilidade da ação do sujeito (sobre o objeto) ao/para o seu desenvolvimento.

Partindo dessa perspectiva da ação, Piaget (1998a, 1998b, 2002) destaca alguns elementos importantes à constituição de uma Educação de qualidade, a saber: a) a importância da ação do aluno sobre o objeto de conhecimento em estudo; b) a questão do **interesse** (enquanto aspecto dinâmico da assimilação) ser levado em consideração no momento da proposição das tarefas escolares de modo a propiciar atividades **necessárias** (ou seja, capazes de serem assimiladas pelo aluno no seu atual estádio de desenvolvimento) (PIAGET, 1998b); c) a importância do **trabalho em grupo** possibilitando a atividade colaborativa entre os sujeitos (PIAGET, 2002) e, por conseguinte, a **cooperação** necessária à **descentração**[10] do pensamento.

A teoria dos campos conceituais, por sua vez, é considerada uma teoria cognitivista neopiagetiana que permite "o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências[11] complexas, nomeadamente daquelas que revelam das ciências e das técnicas." (VERGNAUD, 1996a, p. 155). Devido a isso, tal teoria pode servir à didática, embora não se reduza a essa.

Vergnaud (1996a, 1996b) define **campo conceitual[12]** como sendo um **conjunto de situações** que 'exigem', ao/para o seu tratamento, um determinado conjunto de **conceitos**. Ao analisar as tarefas cognitivas e os procedimentos utilizados pelo sujeito ao resolver os problemas provenientes das **situações**[13], Vergnaud 'desloca' o estudo das

10 A partir da interação entre os iguais (**cooperação**), o indivíduo se 'vê' obrigado a diferenciar e coordenar o seu ponto de vista com os demais, ou seja, **descentrar-se**; disso resulta a objetividade característica do pensamento operatório.

11 Para Vergnaud, a competência de um indivíduo define-se: "– seja pelo fato de que ele é capaz de lidar com uma certa classe de situações (ou para um conjunto de classes de situações); – seja pelo fato de que ele dispõe de um procedimento ou de um método que lhe permite fazer melhor que outro (procedimento mais rápido, mais geral, mais econômico, menos aleatório...); – seja pelo fato que ele dispõe de um repertório de procedimentos ou de métodos alternativos que lhe permite adaptar-se da melhor maneira aos diferentes casos que podem se apresentar, em função do valor tomado pelas diferentes variáveis das situações." (VERGNAUD, 1996b, p. 282, tradução nossa).

12 Vergnaud (1982, p. 40) também define o campo conceitual como sendo "um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição.". Segundo esse autor, o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um considerável período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem.

13 Segundo Vergnaud (1996a), a ideia de situação é a de tarefa cognitiva. Esse autor considera, também, que "os processos cognitivos e as respostas do sujeito são função das situações com as quais eles se confrontam." (VERGNAUD, 1996a, p. 171). Isto é, a ação do sujeito (procedimental-material e

estruturas gerais do pensamento (como realizado por Jean Piaget e colaboradores ao tipificarem as operações lógicas gerais) "para o estudo do funcionamento cognitivo do "sujeito-em-situação"" (FRANCHI, 2010, p. 195). No entanto, Vergnaud considera a pertinência dos 'elementos' teóricos piagetianos – tais como, **adaptação** (**assimilação-acomodação**), **interação**, **reequilíbrio-equilíbrio** (mecanismo de equilibração) e **esquema** – para explicar a gênese e o desenvolvimento cognitivo do sujeito; inclusive, próprio conceito de esquema[14] é por ele utilizado e 'ampliado'.

Em relação ao '**conceito**' (de qualquer área científica e ou técnica-profissional), Vergnaud (1996a, p. 156, [comentário nosso]) afirma que o mesmo não se reduz à sua definição (formalizada), "pelo menos quando nos interessamos pela sua aprendizagem e pelo seu ensino. É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança [e para o adolescente/adulto].". Para Vergnaud (1996a,), um conceito – em uma abordagem psicológica e didática – deve ser compreendido enquanto um trigêmeo de três conjuntos[15] (considerados ao mesmo tempo), a saber:

> $$C = (S, I, \boldsymbol{s})$$
>
> **S**: conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência);
>
> **I**: conjunto das invariantes nas quais assenta a operacionalidade dos esquemas (o significado);
>
> ***s***: conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante). (p. 166).

---

cognitiva-imaterial) está 'em função' das situações com as quais estabelece uma interação.

14 Segundo Vergnaud (1996a, p. 157, **grifos do autor**), o esquema 'refere-se' "à **organização invariante da conducta para uma dada classe de situações**. É nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos-em-acto do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem à acção do sujeito ser operatória.". Cabe destacar, devido ao interesse do presente capítulo, que todo algoritmo (inclusive o algoritmo matemático convencional utilizado em sala de aula) é um esquema; no entanto, nem todo esquema é um algoritmo, pois lhe falta a efetividade, "isto é, a propriedade de chegar ao fim com segurança num número finito de passos. Os esquemas são frequentemente eficazes, mas nem sempre efectivos. Quando uma criança utiliza um esquema ineficaz para determinada situação, a experiência condu-la, quer a mudar de esquema, quer a alterar o esquema. Com Piaget, podemos dizer que os esquemas se encontram no centro do processo de adaptação das estruturas cognitivas: assimilação e acomodação." (VERGNAUD, 1996a, p. 159).

15 A respeito dos três conjuntos (S, I, ***s***), Vergnaud (1996a, p. 166) adverte o seguinte: "Não existe, em geral, bijeção entre significantes e significados, nem entre invariantes e situações. Não se pode, pois, reduzir o significado, nem aos significantes, nem às situações.".

Em síntese, Vergnaud (2011) defende a importância do par **situação/esquema** e, também, o papel do professor a partir da teoria dos campos conceituais:

> O conceito de esquema é essencial porque ele designa formas de organização da atividade para classes de situações bem identificadas e circunscritas. O par teórico **situação/esquema** deve então substituir o par **estímulo/resposta**, de um behaviorismo estreito ao extremo; o par **sujeito/objeto**, embora inevitável, é ele próprio muito geral para permitir estudos empíricos precisos. No entanto, esse privilégio teórico do par **situação/esquema** não deve fazer com que se subestime **o papel da linguagem e de outras formas simbólicas na conceitualização e na comunicação, incluindo-se, nesse caso, também, a comunicação didática**. O professor é um mediador essencial, evidentemente, mas seu papel não se limita a acompanhar a atividade dos alunos, tutelando-os: a presente contribuição tenta mostrar que, na profissionalização do professor, são essenciais as duas funções, a da escolha das situações a serem propostas aos alunos, e a da representação de sua estrutura conceitual por meio de formas simbólicas acessíveis. (p. 26, **grifos do autor**).

'Findada' essa breve discussão acerca da Epistemologia Genética e da teoria dos campos conceituais, na subseção seguinte abordar-se-ão algumas considerações a respeito do campo conceitual aditivo.

O CAMPO CONCEITUAL ADITIVO

Para Vergnaud (2009, p. 197), o campo conceitual aditivo é constituído de/por situações-problema "cuja solução exige tão somente adições ou subtrações". Dentre as seis categorias de relações do campo conceitual aditivo[16] definidas por Vergnaud (2009), abordar-se-ão as três primeiras pelo fato das mesmas serem objeto de ensino no 3.º ano do Ensino Fundamental. Além disso, essas três primeiras categorias contemplam os diferentes significados (**juntar**, **acrescentar**, **separar**, **retirar**, **comparar** e **completar**) 'contidos' nas situações-problema de adição e de subtração;

16 As outras três categorias definidas por Vergnaud (2009) são:

D – Duas transformações se compõem para resultar em uma transformação. Por exemplo: "Paulo ganhou ontem 6 bolinhas de gude e hoje perdeu 9 bolinhas. Em tudo, ele perdeu 3." (p. 204).

E – Uma transformação opera sobre um estado relativo (relação) para resultar em um estado relativo. Por exemplo: "Paulo devia 6 bolinhas de gude para Henrique. Ele devolveu 4. Agora, ele lhe deve somente 2 bolinhas." (p. 204).

F – Dois estados relativos (relações) se compõem para resultar em um estado relativo. Por exemplo: "Paulo deve 6 bolinhas de gude a Henrique, mas Henrique lhe deve 4. Então, Paulo deve 2 bolinhas a Henrique." (p. 205).

Cada uma dessas categorias também se divide em diversas classes dependendo da 'posição' da incógnita e do 'sinal' (positivo ou negativo) das transformações e/ou das relações. Além disso, diferentes classes pertencentes a uma mesma categoria apresentam níveis de complexidade diferentes.

significados esses presentes na habilidade **EF03MA06** 'contemplada' na proposta de ensino a ser apresentada na próxima seção.

Na primeira categoria das relações do campo conceitual aditivo (**Categoria A**), **duas medidas (M_1 e M_2, denominadas 'as partes') se compõem/'combinam' para resultar em uma terceira medida (M_3, o 'todo')**. Dependendo da 'posição' da incógnita, observam-se duas classes de situações-problema conforme apresentado no quadro seguinte:

Quadro 1 – Categoria de relações aditivas envolvendo a composição entre medidas.

CATEGORIA A	CLASSES DE SITUAÇÕES-PROBLEMA	SIGNIFICADO
Duas medidas se compõem para resultar em uma terceira. M_1 (medida) M_2 (medida) M_3 (medida resultante)	**A.1** – A incógnita (***x***) é a M_3.	'Juntar'
	A.2 – A incógnita (***x***) é a M_1 ou a M_2.	'Separar' ou 'Completar'

Fonte: Elaborado pelo autor – adaptado de Vergnaud (2009).

Para uma melhor compreensão a respeito dessa categoria (e de suas classes), apresenta-se – a seguir – um exemplo para cada uma das classes, bem como uma breve discussão a respeito de sua resolução e significado.

- Quando a incógnita (*x*) é a M_3 (medida resultante), observa-se a classe abaixo:

Exemplo da classe A.1: Na horta comunitária cultivada na escola, há 26 'pés' de alface e 20 'pés' de couve. Quantos 'pés' de hortaliças há nessa horta?

Medida 1: 26 'pés' de alface

Medida 2: 20 'pés' de couve

Medida 3: ***x* (a incógnita)** representando o total de hortaliças

Para resolver tal situação, 'juntam-se' as medidas 1 e 2 obtendo-se, assim, o resultado 46 'pés' de hortaliças. Em situações-problema dessa classe, a ideia/o significado relacionado é o de '**juntar**'. A operação utilizada na/para a resolução é a adição (26 + 20).

- Quando a incógnita (*x*) é a M_1 (ou a M_2), observa-se a classe a seguir:

Exemplo da classe A.2: Na horta comunitária cultivada na escola há um total de

46 'pés' de hortaliças. Esse total é formado por 'pés' de alface e por 'pés' de couve. Sabendo-se que há 26 'pés' de alface, então, quantos 'pés' de couve há nessa horta?

Medida 1: 26 'pés' de alface

Medida 2: ***x* (a incógnita)** representando os 'pés' de couve

Medida 3: 46 'pés' de hortaliças ('pés' de alface + 'pés' de couve)

Para resolver tal situação, pode-se: i) 'separar' os 26 'pés' de alface do total dos 46 'pés' de hortaliças obtendo-se, assim, a quantidade dos 'pés' de couve ou, ii) 'completar' o quanto falta para, a partir dos 26 'pés' de alface, obter/'chegar' no total (46 'pés' de hortaliças). No caso i), a ideia/o significado relacionado é o de '**separar'**, cuja resolução 'exige' a operação de subtração (46 – 26). Já no caso ii), a ideia/o significado relacionado é o de '**completar**'. Nesse segundo caso, a operação utilizada é a adição (26 + 20).

Na segunda categoria das relações do campo conceitual aditivo (**Categoria B**), **uma transformação dinâmica T (positiva ou negativa) 'opera' sobre uma medida M_1 (estado inicial) resultando em 'outra' medida M_2 (estado final)**. Dependendo da 'posição' da incógnita, observam-se seis classes de situações-problema conforme apresentado no quadro a seguir:

Quadro 2 – Categoria de relações aditivas envolvendo a transformação de uma medida.

CATEGORIA B	CLASSES DE SITUAÇÕES-PROBLEMA	SIGNIFICADO
Uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida. M_1 (estado inicial) T (transformação) M_2 (estado final)	**B.1** – A incógnita (***x***) é a M_2 (estado final) e:	
	B.1.1 – Há uma transformação positiva.	'Acrescentar'
	B.1.2 – Há uma transformação negativa.	'Retirar'
	B.2 – A incógnita (***x***) é a T e:	
	B.2.1 – Há uma transformação positiva.	'Diferença' ou 'Completar'
	B.2.2 – Há uma transformação negativa.	'Diferença' ou 'Complemento'
	B.3 – A incógnita (***x***) é a M_1 (estado inicial) e:	
	B.3.1 – Há uma transformação positiva.	'Retirar' ou 'Completar'
	B.3.2 – Há uma transformação negativa.	'Acrescentar'

Fonte: Elaborado pelo autor – adaptado de Vergnaud (2009).

Para uma melhor compreensão a respeito dessa categoria (e de suas classes), apresenta-se – a seguir – um exemplo para cada uma das classes, bem como uma breve discussão a respeito de sua resolução e significado.

- Quando a incógnita (***x***) é a M_2 (estado final), observam-se duas classes:

Exemplo da classe B.1.1: Mateus tinha 35 bolinhas de gude e ganhou 9 bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude Mateus tem agora?

Medida 1 (estado inicial): 35 bolinhas de gude

Transformação positiva: ganhou 9 bolinhas de gude

Medida 2 (estado final): ***x*** **(a incógnita)**

Para resolver tal situação, 'acrescentam-se' 9 bolinhas de gude (transformação positiva +9) à medida 35 bolinhas de gude (estado inicial) obtendo-se, assim, a medida 44 bolinhas de gude (estado final). Em situações-problema dessa classe, a ideia/o significado relacionado é o de '**acrescentar**'. A operação utilizada na/para a resolução é a adição (35 + 9).

Exemplo da classe B.1.2: Mateus tinha 35 bolinhas de gude e perdeu 9 bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude Mateus tem agora?

Medida 1 (estado inicial): 35 bolinhas de gude

Transformação negativa: perdeu 9 bolinhas de gude

Medida 2 (estado final): ***x*** **(a incógnita)**

Para resolver tal situação, 'retiram-se' 9 bolinhas de gude (transformação negativa –9) da medida 35 bolinhas de gude (estado inicial) obtendo-se, assim, a medida 26 bolinhas de gude (estado final). Em situações-problema dessa classe, a ideia/o significado relacionado é o de '**retirar**'. A operação utilizada na/para a resolução é a subtração[17] (35 – 9).

- Quando a incógnita (***x***) é a T (transformação), observam-se duas classes:

Exemplo da classe B.2.1: Mateus acabou, agora, um jogo de bolinhas de gude. Ele tinha, antes de jogar, 35 bolinhas de gude. E, agora, ele tem 44 bolinhas de gude.

---

17 Segundo Vergnaud (2009, p. 209, **grifos do autor)**, a operação de subtração relacionada a essa classe de situações constitui uma "operação **sui generis**, que não supõe, de forma alguma, a introdução prévia da adição. Dar, perder, descer, diminuir, etc. são transformações que têm uma significação própria. Evidentemente, elas vão de par com as transformações opostas, receber, ganhar, subir, aumentar, etc., mas elas não lhe são, de modo algum, subordinadas. A subtração não precisa ser definida como a inversa da adição, ela tem uma significação própria; e o problema que se impõe ao professor é o de mostrar o caráter oposto ou recíproco da adição e da subtração, não da segunda em relação à primeira.".

Quantas bolinhas de gude Mateus ganhou nesse jogo?

Medida 1 (estado inicial): 35 bolinhas de gude

Transformação positiva: ***x* (a incógnita)**

Medida 2 (estado final): 44 bolinhas de gude

Para resolver tal situação, pode-se: i) subtrair 35 bolinhas de gude (medida: estado inicial) da medida 44 bolinhas de gude (estado final) obtendo-se, assim, a transformação positiva (+9) que representa a quantidade de bolinhas de gude que Mateus ganhou no jogo; ii) 'completar' o quanto falta para, a partir da medida 35 bolinhas de gude (estado inicial), 'chegar' na medida 44 bolinhas de gude (estado final). No caso i), a ideia/o significado relacionado é o da '**diferença**' entre os estados final e inicial, cuja resolução 'exige' a operação de subtração (44 – 35). Já no caso ii), a ideia/o significado relacionado é o de '**completar**', cuja resolução 'exige' a operação de adição (35 + 9).

Exemplo da classe B.2.2: Mateus acabou, agora, um jogo de bolinhas de gude. Ele tinha, antes de jogar, 35 bolinhas de gude. E, agora, ele tem 26 bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude Mateus perdeu nesse jogo?

Medida 1 (estado inicial): 35 bolinhas de gude

Transformação negativa: ***x* (a incógnita)**

Medida 2 (estado final): 26 bolinhas de gude

Para resolver tal situação[18], subtraem-se 26 bolinhas de gude (medida: estado final) da medida 35 bolinhas de gude (estado inicial) obtendo-se, assim, a transformação negativa (–9) que representa a quantidade de bolinhas de gude que Mateus perdeu no jogo. Em situações-problema dessa classe, a ideia/o significado relacionado é o da '**diferença**' entre os estados inicial e final. A operação utilizada na/para a resolução é a subtração (35 – 26).

18 Além desse procedimento 'diferença' entre os estados inicial e final, Vergnaud (2009, p. 210) identifica o procedimento "complemento" que consiste em 'buscar' o que é preciso retirar do estado inicial para 'chegar' ao estado final. No caso do exemplo B.2.2, realiza-se a operação de subtração (35 – 9) e, como o resultado (26: estado final) é o mesmo que a medida dada no enunciado, conclui-se que foram perdidas 9 bolinhas de gude no jogo.

- Quando a incógnita (***x***) é a M_1 (estado inicial), observam-se outras duas classes:

Exemplo da classe B.3.1: Mateus tinha uma quantidade inicial de bolinhas de gude e ganhou 9 bolinhas de gude, ficando com um total de 44 bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude Mateus tinha inicialmente?

Medida 1 (estado inicial): ***x*** **(a incógnita)**

Transformação positiva: ganhou 9 bolinhas de gude

Medida 2 (estado final): 44 bolinhas de gude

Para resolver tal situação, pode-se: i) 'retirar' 9 bolinhas de gude (a inversa[19] da transformação positiva +9) da medida 44 bolinhas de gude (estado final) obtendo-se, assim, a medida 35 bolinhas de gude (estado inicial); ii) 'completar' o quanto falta para, a partir da transformação positiva (+9), 'chegar' na medida 44 bolinhas de gude (estado final)[20]. No caso i), a ideia/o significado relacionado é o de '**retirar**', cuja resolução 'exige' a operação de subtração (44 – 9). Já no caso ii), a ideia/o significado relacionado é o de '**completar**'. Nesse segundo caso, a operação utilizada é a adição (9 + 35).

Exemplo da classe B.3.2: Mateus tinha uma quantidade inicial de bolinhas de gude e perdeu 9 bolinhas de gude, ficando com um total de 26 bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude Mateus tinha inicialmente?

19 Segundo Vergnaud (2009, p. 211), em situações-problema dessa classe, para determinar o estado inicial (a incógnita) faz-se necessário 'operar'/'aplicar' sobre/no estado final a 'inversa' da transformação. No caso do exemplo B.3.1, a 'inversa' da transformação positiva +9 é a transformação negativa –9. Conforme aponta Vergnaud (2009, p. 211), até determinar o 'complemento', isto é, a transformação (positiva ou negativa) 'correta', a criança pode realizar várias tentativas e corrigir-se em função do resultado obtido.

20 Além dos casos i) e ii), Vergnaud (2009, p. 211) destaca um terceiro procedimento denominado de "**estado hipotético inicial**", "que consiste em formular uma hipótese sobre certo estado inicial, em aplicar-lhe a transformação direta, a encontrar um estado final, e a corrigir a hipótese de partida em função do resultado obtido (comparação do estado final assim encontrado e do estado final dado no problema).". Esse mesmo procedimento é válido para a classe B.3.2 na qual, sabendo-se o 'valor' da transformação negativa e da medida do estado final ('após' a transformação), 'procura-se' a medida do estado inicial ('antes') da transformação.

Medida 1 (estado inicial): ***x* (a incógnita)**

Transformação negativa: perdeu 9 bolinhas de gude

Medida 2 (estado final): 26 bolinhas de gude

Para resolver tal situação, 'acrescentam-se' 9 bolinhas de gude (a inversa da transformação negativa –9) à medida 26 bolinhas de gude (estado final) obtendo-se, assim, a medida 35 bolinhas de gude (estado inicial). Em situações-problema dessa classe, a ideia/o significado relacionado é o de '**acrescentar**', cuja operação utilizada é a adição (26 + 9).

Na terceira categoria das relações do campo conceitual aditivo (**Categoria C**), estabelece-se uma **relação estática (R) de comparação entre as medidas M_1 (referente) e a M_2 (referida)**. O referente representa o 'objeto' no qual a situação-problema se baseia para estabelecer a relação (R). Já o referido constitui o 'objeto' que apresenta uma relação (R) com o referente. Dependendo da 'posição' da incógnita, observam-se seis classes de situações-problema conforme apresentado no quadro a seguir:

Quadro 3 – Categoria de relações aditivas envolvendo uma comparação/relação entre duas medidas.

CATEGORIA C	CLASSES DE SITUAÇÕES-PROBLEMA	SIGNIFICADO DE 'COMPARAR' E
Uma relação 'liga' duas medidas. M_1 (referente) R (relação) M_2 (referida)	**C.1** – A incógnita (***x***) é a M_2 e:	
	C.1.1 – Há uma relação positiva.	'Acrescentar'
	C.1.2 – Há uma relação negativa.	'Retirar'
	C.2 – A incógnita (***x***) é a R e:	
	C.2.1 – Há uma relação positiva.	'Diferença' ou 'Completar'
	C.2.2 – Há uma relação negativa.	'Diferença' ou 'Complemento'
	C.3 – A incógnita (***x***) é a M_1 e:	
	C.3.1 – Há uma relação positiva.	'Retirar' ou 'Completar'
	C.3.2 – Há uma relação negativa.	'Acrescentar'

Fonte: Elaborado pelo autor – adaptado de Vergnaud (1982, 2009).

Para uma melhor compreensão a respeito dessa categoria (e de suas classes), a seguir apresenta-se um exemplo para cada uma das classes, bem como uma breve discussão a respeito de sua resolução e significado.

- Quando a incógnita (***x***) é a M_2 (referida), observam-se duas classes:

Exemplo da classe C.1.1: João tem 12 anos de idade. Paulo tem 5 anos a mais que João. Quantos anos tem Paulo?

Medida 1 (referente): idade de João (12 anos)

Relação positiva: 5 anos a mais que João

Medida 2 (referida): ***x*** **(a incógnita)** representando a idade de Paulo

Para resolver tal situação, 'acrescenta-se' a relação positiva (+5) à idade de João (12: medida referente) obtendo-se, assim, a idade de Paulo (17: medida referida). Além da ideia/o significado de '**comparar**'/'**comparação**', as situações-problema dessa classe envolvem a ideia/o significado de '**acrescentar**'. A operação utilizada na/para a resolução é a adição (12 + 5).

Exemplo da classe C.1.2: João tem 12 anos de idade. Paulo tem 5 anos a menos que João. Quantos anos tem Paulo?

Medida 1 (referente): idade de João (12 anos)

Relação negativa: 5 anos a menos que João

Medida 2 (referida): ***x*** **(a incógnita)** representando a idade de Paulo

Para resolver tal situação, 'retiram-se' 5 anos (relação negativa: –5) da idade de João (12: medida referente) obtendo-se, assim, a idade de Paulo (7: medida referida). Além da ideia/o significado de '**comparar**'/'**comparação**', as situações-problema dessa classe envolvem a ideia/o significado de '**retirar**'. A operação utilizada na/para a resolução é a subtração (12 – 5).

- Quando a incógnita (***x***) é a R (relação), observam-se duas classes:

Exemplo da classe C.2.1: João tem 12 anos de idade e Paulo tem 17 anos de idade. Quantos anos de idade Paulo tem a mais que João?

Medida 1 (referente): idade de João (12 anos)

Relação positiva: ***x* (a incógnita)** anos a mais que João

Medida 2 (referida): idade de Paulo (17 anos)

Para resolver tal situação, pode-se: i) subtrair 12 (idade de João: medida referente) da medida referida (17: idade de Paulo) obtendo-se, assim, a relação positiva (+5) que representa quantos anos a mais Paulo possui em comparação à idade de João; ii) 'completar' o quanto falta para, a partir da medida referente (12: idade de João), 'chegar' na medida referida (17: idade de Paulo). No caso i), a ideia/o significado relacionado é o da '**diferença**' entre as medidas referida e referente, cuja resolução 'exige' a operação de subtração (17 – 12). Já no caso ii), a ideia/o significado relacionado é o de '**completar**', cuja resolução 'exige' a operação de adição (12 + 5). Em ambos os casos, está inerente a ideia/o significado de '**comparar**' as duas medidas (referente e referida).

Exemplo da classe C.2.2: João tem 12 anos de idade e Paulo tem 7 anos de idade. Quantos anos de idade Paulo tem a menos que João?

Medida 1 (referente): idade de João (12 anos)

Relação negativa: ***x* (a incógnita)** anos a menos que João

Medida 2 (referida): idade de Paulo (7 anos)

Para resolver tal situação, pode-se: i) subtrair 7 (idade de Paulo: medida referida) da medida referente (12: idade de João) obtendo-se, assim, a relação negativa (–5) que representa quantos anos a menos Paulo possui em comparação à idade de João; ii) 'complementar' o quanto deve ser retirado da medida referente (12: idade de João) para 'chegar' na medida referida (7: idade de Paulo). No caso i), a ideia/o significado relacionado é o da '**diferença**' entre os as medidas referente e referida, cuja resolução 'exige' a operação de subtração (12 – 7). Já no caso ii), a ideia/o significado relacionado é o de '**complementar**', cuja resolução 'exige' a operação de subtração (12 – 5). Em ambos os casos, está inerente a ideia/o significado de '**comparar'** as duas medidas (referente e referida).

- Quando a incógnita (x) é a M1 (referente), observam-se duas classes:

Exemplo da classe C.3.1: João tem uma determinada idade (em anos). Paulo tem 17 anos de idade e sabe-se que ele tem 5 anos a mais que João. Quantos anos tem João?

Medida 1 (referente): ***x* (a incógnita)** representando a idade de João

Relação positiva: 5 anos a mais que João

Medida 2 (referida): idade de Paulo (17 anos)

Para resolver tal situação, pode-se: i) 'retirar' 5 (a inversa da relação positiva +5) da idade de Paulo (17: medida referida) obtendo-se, assim, a idade de João (12: medida referente); ii) 'completar' o quanto falta para, a partir da relação positiva (+5), 'chegar' na idade de Paulo (17: medida referida). No caso i), a ideia/o significado relacionado é o de '**retirar**', cuja resolução 'exige' a operação de subtração (17 – 5). Já no caso ii), a ideia/o significado relacionado é o de '**completar**'. Nesse segundo caso, a operação utilizada é a adição (5 + 12). Em ambos os casos, está inerente a ideia/o significado de '**comparar**' as duas medidas (referente e referida).

Exemplo da classe C.3.2: João tem uma determinada idade (em anos). Paulo tem 7 anos de idade e sabe-se que ele tem 5 anos a menos que João. Quantos anos tem João?

Medida 1 (referente): ***x* (a incógnita)** representando a idade de João

Relação negativa: 5 anos a menos que João

Medida 2 (referida): idade de Paulo (7 anos)

Para resolver tal situação, 'acrescenta-se' 5 (a inversa da relação negativa –5) à idade de Paulo (7: medida referida) obtendo-se, assim, a idade de João (12: medida referente). Além da ideia/o significado de '**comparar**'/'**comparação'**, as situações-problema dessa classe envolvem a ideia/o significado de '**acrescentar**', cuja operação utilizada na/para a resolução é a adição (7 + 5).

Além destas diferentes categorias de relações do campo conceitual aditivo, a construção desse campo, pelo aluno, também 'envolve' outros conceitos, tais como: conjunto numérico (natural, inteiro, racional, etc.), número enquanto medida (maior/menor que), antecessor e sucessor, sistema de numeração decimal, base de um sistema de numeração, aumento e diminuição, ganho e perda, correspondência, etc.

Em relação ao nível de complexidade, Vergnaud (2009) argumenta que as diferentes classes apresentam diferentes níveis de complexidade no que tange à sua resolução/compreensão. Além desses diferentes níveis de complexidade, uma mesma classe pode apresentar maior (ou menor) complexidade dependendo de alguns fatores presentes na situação-problema, tais como: a) a ordem dos números (unidade, dezena, centena, etc.); b) o conjunto numérico (natural, racional, etc.); c) a ordem e a apresentação das informações. Ainda sobre o nível de complexidade, Magina *et al*. (2001) realizam a seguinte classificação:

Quadro 4 – Nível de complexidade das relações do campo aditivo.

NÍVEL DE COMPLEXIDADE	CATEGORIA	CLASSE(S) DE SITUAÇÃO(S)-PROBLEMA
PROTÓTIPO	A	**A.1:** a incógnita (***x***) é a medida resultante.
	B	**B.1.1:** a incógnita (***x***) é a medida-estado final de uma transformação positiva.
		B.1.2: a incógnita (***x***) é a medida-estado final de uma transformação negativa.
1.ª EXTENSÃO	A	**A.2:** a incógnita (***x***) é uma das medidas das partes.
	B	**B.2.1:** a incógnita (***x***) é a transformação positiva.
		B.2.2: a incógnita (***x***) é a transformação negativa.
2.ª EXTENSÃO	C	**C.1.1:** a incógnita (***x***) é a medida referida de uma relação positiva.
		C.1.2: a incógnita (***x***) é a medida referida de uma relação negativa.
3.ª EXTENSÃO	C	**C.2.1:** a incógnita (***x***) é a relação positiva.
		C.2.2: a incógnita (***x***) é a relação negativa.
4.ª EXTENSÃO	B	**B.3.1:** a incógnita (***x***) é a medida-estado inicial de uma transformação positiva.
		B.3.2: a incógnita (***x***) é a medida-estado inicial de uma transformação negativa.
	C	**C.3.1:** a incógnita (***x***) é a medida referente de uma relação positiva.
		C.3.2: a incógnita (***x***) é a medida referente de uma relação negativa.

Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Magina *et al*. (2001).

As classes de situações-problema classificadas no nível **protótipo** são as de menor complexidade. Nessas classes prototípicas (**A.1**, **B.1.1** e **B.1.2**), a própria estrutura semântica do enunciado dá ‘indícios’ sobre qual operação (adição ou subtração) utilizar. À medida que ‘aumenta’ a ordem da extensão, as classes de situações-problema vão se tornando cada vez mais complexas em termos de sua resolução/compreensão. As classes da **4.ª extensão** (**B.3.1**, **B.3.2**, **C.3.1** e **C.3.2**) são, dentre todas, as de maior nível de complexidade pelo fato de ‘exigirem’, do aluno, uma ‘operação inversa’. Para resolvê-las, deve-se ‘aplicar’ o ‘inverso’ da transformação (ou da relação) na medida estado final (ou na medida referente) para se obter a medida estado inicial (ou a medida referida).

Como um possível ‘desfecho’ da presente subseção, faz-se pertinente a seguinte citação evidenciando o papel/a importância do professor em abordar as diversas classes de situações-problemas (do campo conceitual aditivo) na/durante a Educação Básica:

> Se quisermos valorizar a capacidade de pensamento dos estudantes, será necessário oportunizar que eles resolvam diferentes tipos de situações-problema, por isso, é preciso que o professor tenha clareza das dificuldades presentes nos problemas que propõe, para não ficar repetindo situações que exigem do aluno sempre o mesmo raciocínio. Tanto devem ser propostos problemas que, embora solucionados com uma mesma operação matemática, envolvem diferentes tipos de raciocínios e organização do pensamento, como problemas que relacionam variados conceitos. (ETCHEVERRIA; CAMPOS; SILVA, 2016, p. 646, **grifo nosso**).

Na próxima seção apresentar-se-á uma proposta de ensino, valendo-se dos referenciais teóricos abordados, na qual ‘contempla-se’ a habilidade **EF03MA06** proposta pela BNCC.

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO CAMPO CONCEITUAL ADITIVO

A presente proposta de ensino visa contribuir com a prática pedagógica do professor do 3.º ano do Ensino Fundamental no que tange à abordagem de situações-problema envolvendo os diferentes significados da adição e da subtração. A partir das discussões teóricas realizadas, faz-se possível pensar em ações/atividades – a serem desenvolvidas com os alunos – que contemplem as diversas classes de situações-problema do campo conceitual aditivo. Ao resolverem (e elaborarem) essas situações, espera-se que o aluno – e por meio de sua inter(ação) com/sobre as situações-problema – construa (gradativamente) tal campo conceitual. Por uma questão de sistematização, num primeiro momento apresentar-se-á a ‘estrutura geral’ da proposta de ensino. Em seguida, apresentar-se-ão, na subseção seguinte, alguns exemplos de atividades e situações-problema a serem utilizadas em sala de aula.

Em sua ‘estrutura geral’, a proposta de ensino[21] está organizada nas seguintes ações:

21 Faz-se importante salientar que a presente proposta de ensino ocorrerá em diversas aulas distribuí-

1. Levantamento dos **conhecimentos prévios** dos alunos por meio da aplicação de atividade(s) individual(s) constituída(s) por diversas classes de situações-problema do campo conceitual aditivo. Investigar os conhecimentos anteriores torna-se importante à proposição de atividades **interessantes** e **necessárias** (PIAGET, 1998b) e que, efetivamente, 'causem' **desequilíbrios** possíveis de serem **assimilados-acomodados** (PIAGET, 1976).

   1.1. Socialização das resoluções das situações-problema elaboradas pelos alunos.

2. Abordagem de situações-problema[22] – por meio de várias atividades[23]– contemplando as diversas classes de relações do campo conceitual aditivo. Essa abordagem dar-se-á de maneira individual e/ou em grupo(s)[24], além de ser constituída por questionamentos[25] e explicações que o professor julgar pertinentes. Por exemplo, ao identificar a dificuldade do aluno na utilização do algoritmo convencional da adição (ou da subtração) – algoritmo esse que constitui um dos meios possíveis à resolução da situação-problema – o professor pode (e deve) intervir/explicar de modo a auxiliar/ajudar o aluno.

   2.1. Socialização[26] das resoluções[27] das situações-problema elaboradas pelos alunos. Na/durante a socialização, o professor pode realizar alguns questionamentos, tais como: "*Quantas maneiras diferentes foram utilizadas para resolver a situação-problema?*"; "*Qual é maneira mais econômica/rápida?*"; "*De que maneira você explicaria para o seu colega como resolveu a situação-problema?*"; "É possível

---

das num período de várias semanas (meses). Como a construção do campo conceitual aditivo 'exige' um considerável tempo de ação-experiência-aprendizagem a ser realizada pelo aluno, então, cabe ao professor administrar a quantidade de aulas necessárias. Fica, também, a critério do professor administrar (para cada aula) o tempo necessário à realização das ações que constituem a proposta de ensino.

22 Torna-se relevante pontuar – e em consonância aos diversos estudos da área da Educação (Matemática) – que a situação-problema constitui o '**ponto de partida**' da prática pedagógica (de Matemática) devido à sua potencialidade em 'provocar', no aluno, o seu 'agir'/'pensar' sobre o objeto matemático.

23 Na próxima subseção abordar-se-ão algumas atividades a serem realizadas em sala de aula.

24 Conforme já discutido na seção anterior, o trabalho em grupo – quando caracterizado de/por relações **colaborativas**/**cooperativas** – pode auxiliar no/durante o processo de **descentração** (PIAGET, 2002) do pensamento. Tal descentração, inclusive, pode advir dos momentos/ações de socialização presentes na proposta de ensino.

25 Alguns exemplos de questionamentos possíveis: "*As informações que aparecem na situação-problema são suficientes à sua resolução?*"; "*Como 'iniciar' a resolução da situação-problema?*"; *"Qual é a ideia principal da situação-problema?*"; "*Há outra maneira de resolver a situação-problema?*"; *O resultado obtido tem sentido no contexto da situação-problema?*"; "*Como você determinou a resposta da situação-problema?*"; etc.

26 Sugere-se que o professor exponha as resoluções elaboradas pelos alunos em um mural e/ou 'varal' de modo que as mesmas fiquem expostas durante um período de tempo e que possibilitem, aos alunos, observarem as resoluções realizadas pelos outros colegas e 'confrontarem' com as suas próprias resoluções.

27 Durante a resolução das situações-problemas – e considerando o estádio de desenvolvimento dos alunos do 3.º ano do Ensino Fundamental – o professor pode disponibilizar materiais concretos (material dourado, ábaco, 'tampinhas' de garrafa, etc.). Tais materiais constituem um 'meio de apoio' para o estabelecimento das relações matemáticas e/ou dos cálculos a serem realizados pelos alunos quando da resolução das situações-problema.

resolver fazendo contas 'de cabeça'?"; etc.

3. **Organização** e **síntese/sistematização** do conteúdo abordado. Neste momento, caberá ao professor organizar/registrar as ideias/relações matemáticas/significados inerentes às situações-problema abordadas. Como um possível 'ponto de partida', o professor pode realizar o seguinte questionamento[28] aos alunos: "*O que você aprendeu na aula?*".

Além das referidas ações, cabe ao professor – e no momento em que julgar adequado/necessário – realizar **avaliações diagnósticas individuais** (e, também, por escrito) visando identificar a construção-aprendizagem das diversas relações (e significados) do campo conceitual aditivo. Os resultados advindos dessas avaliações permitem a constante (re)adequação das atividades (e das situações-problemas) desenvolvidas em sala de aula.

'Findada' esta breve apresentação/discussão da 'estrutura geral' da presente proposta de ensino, na próxima subseção apresentar-se-ão algumas sugestões de atividades e exemplos de situações-problema a serem realizadas nas aulas de Matemática.

ALGUNS EXEMPLOS DE ATIVIDADES E SITUAÇÕES-PROBLEMA

Há uma grande variedade de atividades possíveis de serem utilizadas em sala de aula na/para a abordagem de situações-problema do campo conceitual aditivo. Eis alguns exemplos:

- Uma votação (realizada na sala de aula ou na escola), a contabilização do total de alunos ('divididos' em meninas e meninos) da sala/ou da escola, etc., podem representar contextos para a proposição de situações-problema envolvendo a **Categoria A** (a composição entre duas medidas, entre três medidas, etc.).

- Jogos de tabuleiros (e dados) podem constituir um interessante contexto para, a partir deles, serem propostas (pelo professor) situações-problema envolvendo as diferentes classes da **Categoria B** na qual uma determinada medida 'sofre' uma transformação (positiva ou negativa[29]) ao longo do tempo (das 'jogadas').

---

28 Os diversos questionamentos sugeridos (e a serem realizados) nas diversas ações visam o estabelecimento da **comunicação didática** (VERGNAUD, 2011) entre os alunos e o professor. Nesta comunicação, um ponto importante (a ser realizado pelo professor) constitui-se no ato de 'ouvir atentamente' o que os alunos têm a dizer (suas dúvidas, suas hipóteses acerca de determinada resolução, etc.).

29 A transformação negativa, neste caso, pode ocorrer quando o 'marcador' (utilizado no jogo de tabuleiro) 'cair' numa 'casa' que 'solicite' a ação de voltar/retornar um número ***x*** de 'casas'.

- A comparação entre as medidas (comprimento[30]) dos alunos pode representar uma interessante possibilidade para a proposição, pelo professor, de situações--problema envolvendo a **Categoria** C na qual se estabelece uma comparação entre duas medidas.

Além dessas atividades nas quais os alunos têm de resolver situações-problemas já ‘prontas’, faz-se importante que o docente solicite aos alunos que elaborem as próprias situações-problema. O professor pode, por exemplo, ‘depositar’, em uma urna, papéis nos quais estão escritos os significados das situações-problema de adição e subtração (**juntar**, **acrescentar**, **separar**, **retirar**, **comparar** e **completar**). Em seguida, cada aluno (ou grupo de alunos) sorteia um papel e elabora uma situação-problema que ‘envolva’ tal significado. As situações-problema elaboradas podem ser trocadas entre os próprios alunos (ou entre os grupos) de modo que os mesmos as resolvam. Após, realiza-se a socialização das resoluções.

No intuito de auxiliar o professor, no quadro seguinte apresentam-se alguns exemplos de situações-problema das diversas classes do campo conceitual aditivo que podem ser utilizadas em sala de aula.

30 Faz-se oportuno que o docente adote a unidade de medida em centímetros de modo a evitar números decimais.

Quadro 5 – Exemplos de situações-problema das categorias A, B e C do campo conceitual aditivo.

<table>
<tr><th>CATEGORIA</th><th>CLASSE [31]</th><th>EXEMPLOS DE SITUAÇÕES-PROBLEMA [32]</th></tr>
<tr><td rowspan="2">A
Duas medidas se compõem para resultar em uma terceira.</td><td>A.1</td><td>1. Na sala de aula há 15 meninos e 17 meninas. Quantos alunos há na sala de aula?
2. O senhor José tem uma pequena mercearia. No mês de julho, ele realizou a contagem do estoque e organizou as informações na seguinte tabela:
<table><tr><th>TIPO DE PRODUTO</th><th>QUANTIDADE (unidades)</th></tr><tr><td>PRODUTO A</td><td>205</td></tr><tr><td>PRODUTO B</td><td>169</td></tr><tr><td>PRODUTO C</td><td>97</td></tr></table>Quantos produtos A, B e C o senhor José possui no estoque?</td></tr>
<tr><td>A.2</td><td>1. Na sala de aula há um total de 40 alunos. Sabendo-se que há 19 meninas, então, quantos meninos há na sala?
2. A escola realizou uma votação para a escolha da chapa do grêmio estudantil na qual concorreram as chapas A e B. No total, foram contados 657 votos válidos. Sabendo-se que a chapa A obteve 309 votos, então, quantos votos obteve a chapa B?</td></tr>
</table>

31 As classes classificadas como sendo de 4.ª extensão (**B.3.1**, **B.3.2**, **C.3.1** e **C.3.2**) podem representar um 'grande' obstáculo aos alunos do 3.º ano do Ensino Fundamental. Assim, fica a critério do professor, dependendo do nível de desenvolvimento dos 'seus' alunos, abordá-las nesta etapa do Ensino Fundamental.

32 Em algumas situações-problema sugeridas há números de 4.ª ordem. Contudo, cada professor pode adequar a situação-problema de modo a utilizar a ordem numérica que julgar pertinente.

B **Uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida.**	B.1.1	**1.** Ana tinha um total de 15 brinquedos. Em sua festa de aniversário, ela ganhou 13 brinquedos. Com quantos brinquedos Ana ficou? **2.** 90 alunos estavam participando de uma gincana na quadra da escola. Chegaram mais 33 alunos para participar da gincana. Quantos alunos estão, agora, participando da gincana?
	B.1.2	**1.** Ana foi à feira comprar alguns legumes, verduras e frutas. Ela chegou à feira com 25 reais e gastou 18 reais para realizar as suas compras. Quanto sobrou, em dinheiro, para Ana? **2.** 366 alunos estavam participando da Festa Junina realizada no pátio da escola. Depois de um tempo, 166 alunos, que participavam da festa, foram embora. Quantos alunos ainda estão participando da Festa Junina?
	B.2.1	**1.** Marcos tinha 26 figurinhas. Depois de ganhar algumas figurinhas do seu tio, Marcos acabou ficando com 43 figurinhas. Quantas figurinhas Marcos ganhou do seu tio? **2.** Luana tinha 18 reais. Depois que ganhou alguns reais de sua mãe, ela ficou com 29 reais. Quantos reais Luana ganhou de sua mãe?
	B.2.2	**1.** Carlos tinha 38 bolinhas de gude. Ele perdeu algumas e ficou com 29. Quantas bolinhas de gude Carlos perdeu? **2.** Natália foi ao supermercado fazer compras com 45 reais. Após pagar as compras, ela ficou com 16 reais. Quantos reais Natália gastou no supermercado?
	B.3.1	**1.** Ester comprou 2 bolas e ficou com 10 bolas. Quantos bolas Ester tinha antes? **2.** A biblioteca da escola recebeu 155 livros do governo e acabou ficando com 1058 livros. Quantos livros a biblioteca tinha antes de receber os livros do governo?
	B.3.2	**1.** Jéssica tinha alguns pares de sapato em sua sapateira. Depois de doar 4 pares, ela acabou ficando com 10 pares de sapato. Quantos pares de sapato Jéssica tinha antes de realizar a doação? **2.** João perdeu 35 figurinhas num jogo. Ele tem, agora, 302 figurinhas. Quantas figurinhas João tinha antes de jogar?

C **Uma relação 'liga' duas medidas.**	C.1.1	**1.** Amanda tem 14 bonecas. Fernanda tem 8 bonecas a mais que Amanda. Quantas bonecas tem Fernanda? **2.** A escola A possui 856 alunos matriculados. A escola B possui, em número de matrículas, 296 alunos a mais que a escola A. Quantos alunos matriculados a escola B tem?
	C.1.1	**1.** José tem 56 anos de idade. O seu filho Pedro tem 29 anos a menos que José. Quantos anos Pedro tem? **2.** A vila A tem 358 moradores a menos que a vila B. Sabe-se que a vila B tem 1089 moradores. Quantos moradores têm na vila A?
	C.2.1	**1.** No jogo de tabuleiro, João marcou 15 pontos e Luís marcou 19 pontos. Quantos pontos Luís marcou a mais em relação ao João? **2.** Na escola A há 988 alunos. Na escola B há 1089 alunos. Quantos alunos a escola B tem a mais em relação à escola A?
	C.2.2	**1.** Rafael tem 35 bolinhas de gude e Paulo tem 48 bolinhas de gude. Quem tem menos bolinhas de gude? Quantas bolinhas de gude a menos? **2.** No horto florestal há 135 árvores da espécie A e 289 árvores da espécie B. Quantas árvores da espécie A há a menos em relação às arvores da espécie B?
	C.3.1	**1.** Patrícia tem algumas blusas e Letícia tem 6 blusas a mais que Patrícia. Sabendo que Letícia tem 13 blusas, quantas blusas tem Patrícia? **2.** No final do jogo de boliche, Artur ficou com 145 pontos. Sabendo que Artur ficou com 26 pontos a mais que Eric, com quantos pontos Eric ficou?
	C.3.2	**1.** Miguel possui 6 balões a menos que Joaquim. Miguel tem 28 balões. Quantos balões tem Joaquim? **2.** Ao final do jogo de basquete, a equipe de Paula ficou com 2 pontos a menos que a equipe de Rafael. Sabe-se que a equipe de Paula terminou o jogo com 10 pontos. Qual foi a pontuação da equipe de Rafael?

Fonte: Elaborado pelo autor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Espera-se que as discussões teóricas e didático-metodológicas realizadas no presente capítulo contribuam para um 'pensar sobre' a prática pedagógica de Matemática que possibilite ao aluno (e por meio de sua ação) construir os diversos conceitos matemáticos. Abordar as diversas classes de situações-problema torna-se fundamental à construção, pelos alunos, dos diversos significados envolvendo os problemas de adição e subtração.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, SEB, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf >. Acesso em: 12 nov. 2018.

ETCHEVERRIA, Teresa Cristina; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; SILVA, Angélica Fontoura Garcia. Conhecimento matemático para o ensino de problemas aditivos: um estudo com professoras dos anos iniciais. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 9, n. 21, p. 639-661, 2016.

FRANCHI, Anna. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. *In*: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Educação Matemática**: Uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010. cap. 7, p. 189-232.

MAGINA, Sandra Maria Pinto *et al*. **Repensando adição e subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

PIAGET, Jean *et al*. **As formas elementares da dialética**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1996. 228 p.

PIAGET, Jean *et. al*. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. 292 p.

PIAGET, Jean. **A equilibração das estruturas cognitivas**: o problema central do desenvolvimento. Rio de Janeiro: Zahar, 1976. 175 p.

PIAGET, Jean. **Epistemologia Genética**. São Paulo: Martins Fontes, 2007. 123 p.

PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança**. Rio de Janeiro: LTC, 1987. 389 p.

PIAGET, Jean. **Para onde vai a Educação?** Rio de Janeiro: José Olympio, 2002. 80p.

PIAGET, Jean. **Pedagogia**. Lisboa: Instituto Piaget, 1998a. 256 p.

PIAGET, Jean. **Psicologia e Pedagogia**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1998b. 184 p.

PIAGET, Jean. **Seis estudos de psicologia**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2001. 136 p.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a Matemática e a realidade**: problemas do ensino da Matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. UFPR, 2009. 322 p.

VERGNAUD, Gérard. A teoria dos campos conceituais. *In*: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. cap. 3, p. 155-191.

VERGNAUD, Gérard. Au fond de l'action, la conceptualisation. *In*: BARBIER, Jean-Marie. **Savoirs théoriques et savoirs d'action**. Paris: PUF, 1996b. p. 276-292.

VERGNAUD, Gérard. Classification of cognitive task and operations of thought involved in addition and subtraction problems. *In*: CARPENTER, Thomas P.; MOSER, James M.; ROMBERG, Thomas Albert. (org.). **Addition and Subtraction**: a cognitive perspective. New Jersey: Lawrence Erlbaun, 1982. p. 39-59.

VERGNAUD, Gérard. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 1, p. 15-27, 2011.

Capítulo 2

O ENSINO PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO FACE ÀS CONCEPÇÕES E DESAFIOS DOS PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS: NOVOS OLHARES

Roseli Regina Fernandes Santana
Luciane de Castro Quintiliano
Nelson Antonio Pirola

INTRODUÇÃO

O capítulo que ora apresentamos trata-se de uma investigação no campo do ensino da Álgebra nos anos iniciais, entendida hoje, como uma demanda curricular entre as unidades temáticas contempladas pela Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017) no ensino da Matemática, cujo objetivo é compreender de que maneira se apresentam as concepções e desafio dos professores pedagogos acerca do ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e discutir algumas possibilidades de tarefas que podem potencializar o desenvolvimento de tal pensamento matemático ainda nos primeiros anos de escolaridade.

Os dados utilizados nesta investigação foram revisitados da produção de Santana e Quintiliano (2017), os quais originaram-se a partir das observações e experiências de sala de aula das autoras e de inquietações sobre a construção do pensamento algébrico nos alunos: tarefas significativas que contribuem para o seu desenvolvimento, o baixo desempenho em avaliações externas com questões que exijam articulá-lo em sua resolução, o conhecimento algébrico do professor que ensina Matemática nos anos iniciais e o uso das tecnologias na sala de aula cada vez mais equivocadas. Tal projeto foi realizado por meio de uma proposta metodológica de ensino com uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental, a partir da utilização de ambiente virtual de aprendizagem com tarefas articulando os campos da Aritmética, da Geometria e da

Álgebra como saberes igualmente importantes, contribuindo com o desenvolvimento do pensamento algébrico e rompendo com a visão tradicional do ensino da Álgebra, da crença que os alunos só estão aptos a pensar algebricamente, por volta do sexto, sétimo ano do Ensino Fundamental. Aqui discutimos a partir de respostas dadas no *Questionário 1*, instrumento da referida pesquisa, pelos professores dos anos iniciais sobre os seus saberes para o ensino do desenvolvimento do pensamento algébrico, a fim de nortear e embasar percursos formativos, objetivando o aprimoramento da prática docente acerca da temática.

Na perspectiva da Psicologia da Educação Matemática, lugar de onde vislumbramos os processos de ensino e aprendizagem, entendemos que os aspectos afetivos que permeiam as aprendizagens matemáticas são tão importantes quanto os aspectos cognitivos. Nesse sentido, o contato com boas experiências nas aulas de Matemática logo no início da escolarização podem contribuir para o desenvolvimento de atitudes e crenças positivas em relação à essa disciplina e, consequentemente, em determinados conteúdos específicos apresentados ao longo da escolaridade, bem como já evidenciado em diversos estudos a influência que a família e professores podem exercer sobre o indivíduo de maneira negativa ou positiva (BRITO, 1996).

Dizemos isso, pois dentre as áreas que constituem a base da Matemática Escolar, a Aritmética, a Geometria e a Álgebra, essa última é apontada, de forma significativa, como um dos campos que alunos e professores, de diferentes níveis de ensino, apresentam mais aversão, despertando medo, angústia e ansiedade, como constatada na pesquisa recente Santana (2019), estudo esse envolvendo professores dos anos iniciais (*in-service*) e estudantes do curso de Pedagogia (*pre-service*). Isso justifica-se não somente pelas metodologias de ensino utilizadas pelo professor, mas o próprio desenvolvimento de conceitos e crenças que tangenciam o ensino da Álgebra e o conhecimento especializado do professor (CARRILLO et al, 2013).

Haja vista, tais considerações, defendemos que o ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico deve acontecer desde os primeiros anos de escolaridade, como corroboram os estudos de Blanton e Kaput (2005); Canavarro (2007); Ponte, Branco e Matos (2009) e Mestre (2014), não como uma mera preparação para os anos subsequentes, mas para, além disso, trata-se do desenvolvimento da capacidade de generalizar, da abstração do raciocínio matemático, de garantir os direitos de aprendizagens das crianças, reduzindo também, possíveis impactos nas aprendizagens algébricas e o rompimento das fronteiras entre os diferentes campos do saber matemático. Concordamos pela inclusão do pensamento algébrico no currículo ainda nos anos iniciais "não só pelo seu carácter preparatório para a Álgebra dos anos posteriores, mas também o seu contributo para o aprofundamento da compreensão da Matemática e do poder desta área do saber" (CANAVARRO, 2007, p. 92). Portanto,

> A introdução do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade representa um passo em frente muito significativo pela possibilidade que inspira de uma abordagem à Matemática mais integrada e interessante, na qual os alunos desenvolvam as suas capacidades matemáticas motivados por uma actividade rica e com sentido, que lhes possibilita a construção de conhecimento relevante, com compreensão, ampliando o seu património quer ao nível dos processos, quer dos produtos matemáticos (conhecimentos que podem usar posteriormente). Em consequência, os alunos poderão desenvolver uma atitude favorável em relação à Matemática, reconhecendo a sua unidade, o seu valor e o seu poder, e poderão igualmente conseguir melhorar a preparação para as aprendizagens posteriores, nomeadamente no domínio da Álgebra. (CANAVARRO, 2007, p. 113)

Ainda que, consideramos um avanço, a conquista de termos um documento norteador (BRASIL, 2017), que traz explicitamente uma unidade temática denominada "Álgebra", sinalizando sua relevância no desenvolvimento do pensamento matemático ao longo da escolaridade dos alunos, infelizmente ainda este comete as mesmas falhas de documentos curriculares anteriores (BRASIL, 1997, 2012), a falta de clareza, de aspectos de conceptualização a respeito do ensino da Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a qual entendemos que se trata do ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Apenas elencar habilidades que devem ser desenvolvidas em sala de aula, não subsidia a prática docente e continuaremos a ver tarefas algébricas trabalhadas em sala de aula sem intencionalidade.

Nesse sentido, apresentamos algumas concepções e elementos caracterizadores do pensamento algébrico, bem como as contribuições da literatura nacional e internacional, em seguida, discutimos o que pensam os professores que ensinam Matemática nos anos iniciais, suas concepções e desafios acerca do ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico, com dados coletados de um grupo de cinco (05) professores de uma escola particular do interior de São Paulo.

A posteriori, passamos a ilustrar, por meio de diferentes tarefas algébricas, algumas possibilidades que potencializam o trabalho pedagógico para o desenvolvimento desse pensamento matemático, as quais abordam padrões figurais e numéricos por meio da identificação de regularidades, padrões e sequências; relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão, as propriedades da igualdade e, sobretudo, a generalização, por ser considerado o ponto central desse pensamento matemático.

Finalizamos o capítulo trazendo à luz da teoria e da discussão dos dados coletados nossas considerações sobre o que preconizamos e entendemos a respeito do desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais, a relação com a formação inicial e continuada e práticas que podem contribuir para uma aprendizagem significativa dos diferentes conceitos matemáticos, em especial, os algébricos.

PENSAMENTO ALGÉBRICO: NOVOS OLHARES SOBRE O CONTEXTO CURRICULAR NACIONAL

Para iniciarmos essa discussão, clarificamos aos leitores o que entendemos por pensamento algébrico, o porquê de pensar no seu ensino já nos anos iniciais e, quais as condições para que ele efetivamente ocorra. Adotamos para tanto, algumas concepções consideradas clássicas na literatura internacional sobre o pensamento algébrico e o conhecimento especializado o professor.

Para Blanton e Kaput (2005), o pensamento algébrico "é um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade" (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413, *tradução e grifo nosso*). Essa concepção de pensamento algébrico julgamos ser a mais completa em termos de definição, amplitude, relevância e potencialidade desse pensamento matemático, enfatizando suas múltiplas faces, pautado em um currículo de orientação transversal para uma nova Álgebra, aquela que se baseia em hábitos de pensamento e de representação, de generalização, no tratamento dos números e as operações, do estudo de padrões e regularidades, desde os primeiros anos de escolaridade.

Assim, ao realizarmos uma análise de documentos curriculares brasileiros para os anos iniciais com foco no pensamento algébrico (BRASIL, 1997, 2012, 2017), nos deparamos com um desenvolvimento ainda embrionário acerca da temática no país, evidenciando um processo em construção quanto ao ensino da Álgebra nos anos iniciais em âmbito nacional, ao longo das últimas décadas.

Em Brasil (1997), esse pensamento fora tratado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) como "pré-álgebra", expressão empobrecedora e reducionista da amplitude de alcance do pensamento algébrico, sendo praticamente pouco difundido na esfera educacional, sem repercussão nas salas de aula. Posteriormente, em 2012, o Pacto Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), programa de formação continuada de professores, trouxe o pensamento algébrico como um dos eixos estruturantes no ensino da Matemática nos anos iniciais. Infelizmente, ainda não alcançou o esperado no que se refere a caracterização e elementos que o perpassam, os professores continuaram com as mesmas práticas e, quando não, apresentando tarefas que promoveriam o desenvolvimento do pensamento algébrico, mas sem a devida intencionalidade, planejamento e intervenções necessárias para o seu ensino, evidenciando uma fragilidade tanto na formação inicial como continuada.

Conforme explicitado em Brasil (2017), entendemos que o documento faz menção a este tipo de pensamento matemático, sem clarificar os conceitos e elementos que o caracterizam, bem como tarefas que possam potencializar seu ensino.

> [...] A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (BRASIL, 2017, p.268).

Por outro lado, enfatiza a real necessidade do trabalho pedagógico acontecer desde os anos iniciais,

> Nessa perspectiva, é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. (BRASIL, 2017, p.268)

O quadro 1 explicita como a BNCC (BRASIL, 2017) propôs a distribuição da unidade temática Álgebra durante os anos iniciais do Ensino Fundamental. Nele observamos um percurso gradativo das habilidades em níveis de complexidade e abstração ao longo dos primeiros anos, no entanto, em termos de orientação curricular, identificamos lacunas evidentes da caracterização e compreensão dos conceitos algébricos, base para o desenvolvimento da capacidade de generalização, considerada cerne do pensamento algébrico (SCHLIEMANN; CARRAHER; BRIZUELA, 2006), como também em outros documentos curriculares nacionais, como Brasil (1997, 2012).

Quadro1 - Síntese das habilidades requeridas para unidade temática "Álgebra" para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, presentes na BNCC.

TURMA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
1º ano	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências; Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo).	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida. (EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
2º ano	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas; Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida. (EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos. (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
3º ano	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas; Relação de igualdade.	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes. (EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.

4º ano	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural; Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero; Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão; Propriedades da igualdade	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural. (EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades. (EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas. (EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos. (EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
5º ano	Propriedades da igualdade e noção de equivalência; Grandezas diretamente proporcionais; Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais;	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido. (EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: Extraído de Santana (2019, p. 32)

Ao compararmos com *Nacional Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), instituição constituída pelas diferentes tendências em Educação Matemática, a Álgebra é sinalizada como um tema transversal com os demais eixos da Matemática, um fio condutor ao longo da escolaridade. Nesse documento, de 2007, evidencia-se a importância das crianças desenvolverem suas capacidades e, gradativamente, se apropriarem das representações e linguagem simbólica, tanto ao que tange a Aritmética Generalizada como do Pensamento Funcional. Vemos que ainda existe uma superficialidade no tratamento dos conceitos e habilidades desse pensamento junto das crianças tendo em vista a proposta apresentada no ensino da Álgebra em outros países, como Portugal e Estados Unidos. Acreditamos que as crianças sejam capazes de muito mais no que se refere ao desenvolvimento da capacidade de generalização.

Quadro 2: Normas e princípios para o ensino da Álgebra, conforme NCTM (2007)

NORMAS E PRINCÍPIOS	PRÉ-ESCOLA AO 2º ANO	3º AO 5º ANO
Compreender padrões, relações e funções	• Agrupar, classificar e ordenar objetos por tamanho, número e outras propriedades; • Reconhecer, descrever e ampliar padrões, tais como sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples e interpretá-los em diversas representações; • Analisar a forma como são gerados tanto os padrões de repetição como de crescimento.	• Descrever, ampliar e fazer generalizações acerca de padrões geométricos e numéricos; • Representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos.
Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos Algébricos	• Ilustrar os princípios e as propriedades gerais das operações, como a comutatividade, através da utilização de números específicos; • Usar representações concretas, pictóricas e verbais, para desenvolver uma compreensão das notações simbólicas inventadas e convencionais.	• Identificar propriedades, como a comutatividade, a associatividade e a distributividade, e aplicá-las ao cálculo com números inteiros; • Representar a noção de variável, enquanto quantidade desconhecida, através de uma letra ou símbolo; • Expressar relações matemáticas através de equações.

Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas	• Modelar situações que envolvam a adição e subtração de números inteiros, através da utilização de objetos, figuras e símbolos.	• Modelar situações problemáticas, usando objectos, e recorrer a representações como gráficos, tabelas e equações para tirar conclusões.
Analisar a variação em diversos contextos	• Descrever variações qualitativas, como o facto de um aluno ter crescido; • Descrever variações quantitativas, como o facto de um aluno ter crescido 5 cm ao longo de um ano.	• Investigar a forma como a variação de uma variável se relaciona com a variação de uma segunda variável; • Identificar e descrever situações com taxas de variação constantes ou variáveis e compará-las.

Fonte: Canavarro, 2007, p. 93-94, apud Santana, 2019, p. 35.

Mais recentemente, tivemos a homologação do Currículo Paulista, cuja abordagem, que em consonância com a BNCC, também contempla a Álgebra desde os Anos Iniciais destacando a relevância da prática de ensino voltada para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

> A necessidade de atuar no desenvolvimento do pensamento algébrico, bem como na compreensão dos conceitos algébricos e na capacidade de usar suas representações em situações novas, por vezes inesperadas, reforça a importância do ensino da álgebra desde os Anos Iniciais, ampliando-se a cada ano, até chegar aos registros com letras. O aprendizado da Álgebra contribui para a compreensão das propriedades e generalizações, para ampliar a capacidade de abstração, o que promove "saltos" cognitivos no raciocínio matemático (SÃO PAULO, 2019, p. 319)

Muitas pesquisas, tanto no Brasil como em outros países, enfatizam que um importante fator que pode influenciar negativamente o desempenho e a aprendizagem da Álgebra é a aprendizagem inadequada da Aritmética, conforme Wong (1997) apontou em seu estudo realizado em Hong Kong. Complementando, Kieran (1990) ressalta que a articulação no ensino da aritmética e da álgebra tem sido documentada em várias investigações. Esse fato pode estar relacionado com as dificuldades apresentadas pelos estudantes na transição da aritmética para a álgebra. Segundo a autora, as várias dificuldades para aprender álgebra são encontradas não só em estudantes que estão iniciando a pré-álgebra, mas também em estudantes de séries mais avançadas. Considerando tal fato, no presente estudo considera-se de extrema importância também averiguar se as dificuldades apresentadas pelos estudantes decorrem de uma aprendizagem inadequada em Aritmética.

Souza e Diniz (1996) dizem que a Álgebra é a linguagem da Matemática para expressar eventos genéricos, e como toda linguagem, possui seus símbolos e suas regras. Tais símbolos referem-se às letras e aos sinais da aritmética, permitindo-nos manipular os símbolos, garantindo o que é admitido e o que não é durante a realização das manipulações.

Segundo as autoras, a diferenciação da Álgebra e da Aritmética está em seus objetivos, pois enquanto a aritmética trata de números, operações e suas propriedades visando à solução de problemas ou de tarefas que exigem uma resposta numérica, a álgebra busca expressar o que é genérico, ou seja, o que se pode afirmar para diversos valores numéricos independentes de quais sejam eles precisamente.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998), o trabalho com os conteúdos relacionados aos números e as operações na Aritmética deve privilegiar atividades que possibilitem ampliar a compreensão do significado das operações, isto é, proporcionar atividades que permitam aos estudantes estabelecer e reconhecer relações entre os diferentes tipos de números e entre as diferentes operações, impedindo assim que as dificuldades em aritmética sejam transportadas para a aprendizagem dos conceitos algébricos.

Ainda conforme este documento, aprender Matemática neste nível de ensino deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um “saber fazer” Matemática e um pensar matemático. Este documento enfatiza ainda as diversas finalidades do ensino desta disciplina, e dentre elas: desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas e utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos.

Conforme Quintiliano (2011), para o sucesso na solução de problemas, não é somente necessária a seleção da estratégia mais apropriada ao problema, mas também é imprescindível possuir os conhecimentos declarativo (conceitual) e de procedimento, requeridos no problema a ser solucionado, pois o conhecimento conceitual e a destreza de procedimentos são dois tipos de conhecimento considerados de suma importância para os estudantes, e que a capacidade no campo da matemática se apoia sobre o desenvolvimento dos estudantes e o elo entre seu conhecimento a respeito dos conceitos e dos procedimentos.

E ainda, é de extrema importância ressaltar que o conhecimento declarativo inter-relaciona-se com o conhecimento de procedimentos, e são pilares fundamentais e interdependentes para um desempenho satisfatório e adequado na solução de problemas, pois o acionamento do conhecimento conceitual, bem como o domínio das técnicas e estratégias, são elementos importantes para o desenvolvimento da capacidade para solucionar problemas matemáticos.

Destacamos ainda que, as pesquisas brasileiras a respeito do desenvolvimento do pensamento são escassas, os principais trabalhos ainda são referências de produções de origem portuguesas e norte-americanas. No Brasil, destacamos as produções de Ferreira (2017) e Santana (2019) no tratamento dessas questões. Ferreira (2017) pesquisou o conhecimento matemático de professores dos anos iniciais sobre o ensino do pensamento algébrico, durante um curso de formação continuada, contemplando a Aritmética Generalizada e do Pensamento Funcional sobre as propriedades dos números e das operações, o sinal de igualdade como equivalência e as sequências e padrões. Seu estudo evidenciou que o conhecimento matemático do professor é limitado ao saber fazer e identificar os erros dos alunos do que para um nível de conhecimento que justificasse com clareza os porquês matemáticos.

Santana (2019) investigou o desenvolvimento do pensamento algébrico em relação às crenças de autoeficácia, as atitudes em relação à Matemática e ao conhecimento matemático especializado para o seu ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental, analisando possíveis relações e influências de aspectos afetivos na solução de problemas algébricos. A análise dos dados, em suas diferentes etapas, evidenciou que os estudantes do curso de Pedagogia apresentaram ter atitudes negativas em relação à Matemática, enquanto os professores atuantes dos anos iniciais sinalizaram ser positivas; quanto às crenças de autoeficácia para o conhecimento especializado e ensino do desenvolvimento do pensamento algébrico, nos dois grupos foram positivas. O estudo constatou ainda que, os participantes se sentem mais inseguros para o ensino do pensamento algébrico do que para com o conhecimento de conteúdo, apesar de parecer conhecer pouco a respeito de elementos conceituais e pedagógicos, bem como os elementos caracterizadores desse pensamento matemático.

O QUE OS RESULTADOS AINDA PODEM NOS DIZER?

Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalan (2013), versam sobre o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (*Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge* - MTSK). Os pesquisadores propõem os seguintes subdomínios do conhecimento matemático do professor para o ensino: os subdomínios do Conhecimento Matemático (*Mathematical Knowledge* - MK) - *Knowledge of topics* (KoT), *Knowledge of the structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of the practice of Mathematics* (KPM) - e os subdomínios do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge* – PCK) - *Knowledge of Mathematics* (KMT), *Knowledge of features of learning Mathematics* (KFLM) e *Knowledge of Mathematics learning standards* (KMLS), descortinando aspectos fundamentais do conhecimento do professor, o estudo sobre as crenças dos professores e futuros professores que ensinam Matemática, na qual segundo os autores, também se entrelaçam com o conhecimento especializado do professor, pois tais aspectos afetam/impactam o processo de ensino e aprendizagem de professores e alunos, evidenciando a importância de se olhar não apenas para o domínio de conteúdo, mas também de fatores inerentes ao exercício da docência.

Fundamentados na perspectiva de Carrillo et al (2013), realizamos uma análise inicial dos dados do *Questionário 1* em 2017, e constatamos uma relação com os saberes algébricos dos participantes, e identificamos uma dificuldade em verbalizar as concepções e elementos que pudessem caracterizar o pensamento algébrico (as falas se restringiram ao ensino das equações, incógnitas, encontrar o valor de “x”), resultados esses ratificados em pesquisas mais recentes. Além disso, apesar de concordarem que é possível desenvolver tarefas que promovam o pensamento algébrico nos anos iniciais, não descreveram estas tarefas ou não conseguiram identificar em sua prática quais seriam elas, permitindo assim, que inferíssimos que embora estas tarefas com os padrões de regularidades, equivalências, sequências numéricas e geométricas, generalizações sejam encontradas na sala de aula, são aplicadas sem a intencionalidade e objetividade pelo professor, apontando para as lacunas em seu conhecimento matemático (MK) e também do conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK).

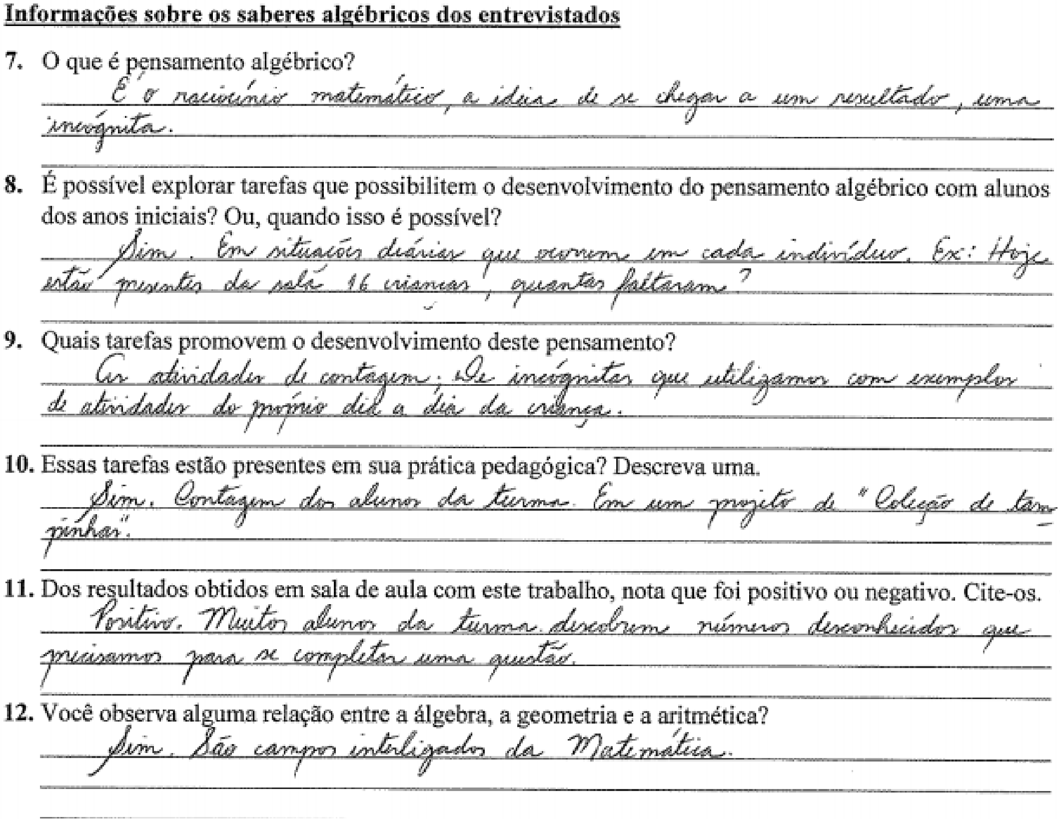
Ao revisitarmos os protocolos de pesquisa e as perguntas norteadoras: *O que é pensamento algébrico? É possível explorar tarefas que possibilitem o desenvolvimento do pensamento algébrico com alunos dos anos iniciais? Ou, quando isso é possível?*

Quais tarefas promovem o desenvolvimento deste pensamento? Essas tarefas estão presentes em sua prática pedagógica? Descreva uma. Dos resultados obtidos em sala de aula com este trabalho, nota que foi positivo ou negativo. Cite-os. Você observa alguma relação entre a álgebra, a geometria e a aritmética?, lançamos outros novos olhares a respeito do conhecimento especializado do professor que ensina Matemática nos anos iniciais, especialmente no que tange suas concepções e seus desafios para o ensino voltado para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nas entrelinhas e linhas das questões propostas são reveladas tantas outras fragilidades oriundas de uma formação inicial deficitária quando se pensa no ensino da Matemática, professores que vão para as salas de aulas e ensinam ainda como foram ensinados, por vezes com conceitos equivocados e práticas tradicionais de ensino, com crenças e atitudes resultantes de experiências desfavoráveis durante sua vida escolar e que nada corroboram para sua condição e prática docente, seja no que diz respeito aos saberes conceituais ou metodológicos.

Essa é uma realidade na Educação Básica, no ensino da Matemática nos anos iniciais. Assim, não nos causa espanto, ao falarmos em pensamento algébrico e soar para a maioria como algo novo, inusitado, quando, ainda que de modo tímido e superficial, já se apresenta em documentos curriculares há vinte anos e que só agora vem ressignificando no seu espaço de direito e relevância.

Figura 1: Trecho do questionário acerca dos saberes algébrico de uma das participantes



Informações sobre os saberes algébricos dos entrevistados

7. O que é pensamento algébrico?
É o raciocínio matemático, a ideia de se chegar a um resultado, uma incógnita.

8. É possível explorar tarefas que possibilitem o desenvolvimento do pensamento algébrico com alunos dos anos iniciais? Ou, quando isso é possível?
Sim. Em situações diárias que ocorrem em cada indivíduo. Ex: Hoje estão presentes da sala 16 crianças, quantas faltaram?

9. Quais tarefas promovem o desenvolvimento deste pensamento?
As atividades de contagem. De incógnitas que utilizamos com exemplos de atividades do próprio dia a dia da criança.

10. Essas tarefas estão presentes em sua prática pedagógica? Descreva uma.
Sim. Contagem dos alunos da turma. Em um projeto de "Coleção de tampinhas".

11. Dos resultados obtidos em sala de aula com este trabalho, nota que foi positivo ou negativo. Cite-os.
Positivo. Muitos alunos da turma descobrem números desconhecidos que precisamos para se completar uma questão.

12. Você observa alguma relação entre a álgebra, a geometria e a aritmética?
Sim. São campos interligados da Matemática.

Fonte: Protocolos de pesquisa (SANTANA; QUINTILIANO, 2017)

Notamos, ao observar a figura 1, que a professora participante não menciona elementos consistentes que possam caracterizar a ideia de pensamento algébrico, demonstra pouca ou nenhuma familiaridade com a terminologia, nem com as orientações curriculares, uma vez que a exploração das noções de incógnita e variável, dar-se-á em anos posteriores aos dos anos iniciais na aproximação com a Álgebra formal. Além disso, apesar de concordar que esse trabalho deve acontecer nesse nível de ensino, não aponta por meio de quais tarefas isso pode ocorrer, ou seja, ainda que já esteja realizando, reconhecê-la como tal de modo a potencializar sua exploração no espaço da sala de aula. Os exemplos citados nas questões 8 e 10, evidenciam bem isso, um olhar meramente aritmético sobre as situações do dia a dia como ideia do pensamento algébrico, em detrimento de uma argumentação discursiva, onde o aluno é instigado a justificar suas escolhas e percursos, explicando como pensou, refletindo sobre o objeto de estudo.

Tendo em vista a necessidade eminente de clarificar as concepções conceituais e possibilidades de ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico em turmas dos anos iniciais, voltadas especialmente ao docente que atua nesse segmento, assegurando-lhe o que espera acerca de seu o Conhecimento Matemático e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, fundamentos essenciais do conhecimento especializado do professor que ensina Matemática.

A seguir apresentamos alguns elementos fundamentais que circundam o pensamento algébrico, como: o sinal de igualdade e seus diferentes significados; as relações entre os números, operações e suas propriedades; as sequências, padrões e regularidades e um dos aspectos centrais, a generalização, por meio de algumas tarefas algébricas com potencial desenvolvimento nos anos iniciais, haja vista a necessidade formativa constatada na análise dos resultados dos dados coletados.

CARACTERIZAÇÃO E ELEMENTOS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: ALGUMAS POSSIBILIDADES PARA O ENSINO

Kaput (2008) define dois o aspectos centrais que caracterizam a Álgebra: Álgebra como generalização simbólica de regularidades e a Álgebra como raciocínio sintaticamente guiado e acções em generalizações expressas no sistema de símbolos convencionais. A partir desses dois aspectos, subdividiu em outras três vertentes:

- o estudo das estruturas e sistemas abstractos a partir de cálculos e relações, incluindo os que decorrem da Aritmética (álgebra como aritmética generalizada) e do raciocínio quantitativo;
- o estudo das funções, relações e variação;
- a aplicação de uma linguagem de modelação dentro e fora da Matemática.

Entendemos que a primeira vertente, possui um carácter potencialmente algébrico da aritmética, pois desenvolve a capacidade da generalização a partir das relações numéricas e das operações aritméticas e suas propriedades, contemplando a noção de equivalência associada ao sinal de igualdade.

Já a segunda vertente está associada à exploração de padrões numéricos ou geométricos, aos diferentes tipos de variação e de sistemas simbólico articulando significativamente o pensamento funcional. A última vertente refere-se à modelação e pode ser expressa pelas equações, funções e parâmetros. Passamos a delinear melhor essas vertentes e seus elementos e em seguida, exemplificando por meio de tarefas com potencial algébrico para os anos iniciais. Portanto, para Blanton (2008), aritmética generalizada e pensamento funcional constituem a base para o desenvolvimento do pensamento algébrico, onde o "pensamento funcional baseia-se num conjunto de capacidades para além daquelas que estão associadas à aritmética generalizada. Requer que os alunos atendam à mudança e ao crescimento" (MESTRE; OLIVEIRA, 2011, p. 203-204).

De modo geral, o ponto central do pensamento algébrico refere-se à capacidade de generalização, ou seja, a "generalização está no coração do pensamento algébrico". (SCHLIEMANN, CARRAHER, & BRIZUELA, 2007, p. 12 apud CANAVARRO, 2007, p. 82).

A) DIFERENTES SIGNIFICADOS DO SINAL DE IGUALDADE

Comumente encontramos nos bancos escolares o uso do sinal de igualdades apenas como função de indicar o resultado de uma operação e, não no sentido de estabelecer diferentes equivalências. Em 1981, Kieran, identificou três significados que o sinal de igualdade assume na matemática escolar: os significados relacional, operacional e de equivalência, com predominância do segundo sobre os demais e, muitas vezes o terceiro nem é apropriado pelos alunos ao longo do Ensino Fundamental.

Ponte, Branco e Matos (2009) afirmam que,

> O sentido do sinal de igual como resultado de uma operação é largamente usado nos primeiros anos. No entanto, é fundamental que não se perca o sentido mais geral deste sinal como estabelecendo uma equivalência entre duas expressões numéricas. Os alunos devem, por isso, ser capazes de começar por reconhecer igualdades muito simples. Contudo, o professor deve ter em conta que estas igualdades não devem surgir apenas do modo que é mais habitual, ou seja, na forma $a + b = c$, mas também como $c = a + b$. Os alunos podem, assim, começar por reconhecer diferentes formas de representar 7 através de igualdades numéricas: 7 = 1+ 6, 7 = 2 + 5, 7 = 3 + 4, 7 = 4 + 3, 7 = 5 + 2, 7 = 6 +1 (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 20).

No reconhecimento de diferentes formas de se escrever um mesmo número, por exemplo, ou romper com formas usuais de escritas numéricas, como 10 = 6 + 4 (mudando o resultado de membro) ou ainda, 13 + 5 = 20 – 2 (uma operação igual a outra para representar o número 18), são maneiras de explorar o sinal de igualdade com um sentido de equivalência, significado relevante para a compreensão dos conceitos algébricos. Uma vez explorado apenas como uma necessidade de se realizar uma operação, o aluno não infere o significado de equivalência para definir a solução, entende que o número opera um com outros para obter um resultado específico. Assim, ao resolverem equações, por exemplo, nos anos posteriores, agem mecanicamente, sem compreender o que e por que estão fazendo aquilo.

Procurando equilíbrios

Objetivo: A atividade propicia duas ideias favoráveis ao desenvolvimento do pensamento algébrico: (a) a igualdade como relação entre duas quantidades e (b) conhecendo-se o total da soma de duas ou três quantidades desconhecidas (incógnitas) há, potencialmente, diferentes possibilidades para o valor dessas quantidades.

Público: 1º e 2º anos

Figura 1

A **Figura 1** representa uma balança numérica em que é possível observar que existem dois braços que estão escritos os números de 1 a 10, e logo abaixo, têm pinos onde pode-se pendurar "pesos" iguais ao que está desenhado à direita da balança.

A balança está em equilíbrio quando, por exemplo, pendura-se no braço esquerdo um peso abaixo do 10 e no braço direito um peso sob o 2 e outro sob o 8 (vide **Figura 2**). Entretanto, se pendurarmos neste último braço um peso em 3 e outro em 6 ficaria em desequilíbrio, pois 10 é diferente de 3+6.

Figura 2

Há uma regra muito importante para trabalhar com esta balança: só se pode colocar um peso em cada número.

1. Colocar no braço esquerdo da balança um peso no número 8. Como se pode equilibrar a balança colocando dois pesos no braço direito?
2. Colocar num dos braços da balança um peso em 8 e outro em 4. Encontrar um processo para equilibrar a balança colocando três pesos no outro braço.
3. Escolher dois números localizados num dos braços da balança e colocar um peso em cada um. Encontrar todas as possibilidades diferentes de equilibrar a balança colocando três pesos no outro braço. Como se pode ter a certeza de que se encontraram todas as possibilidades? Explicar o raciocínio.

Para facilitar a exploração da tarefa é importante levar para a sala de aula uma balança "real". Esta pode ser construída com madeira como, por exemplo, a balança semelhança da representada na **Figura 1**. Como alternativa, pode-se utilizar ou construir uma balança de pratos conforme a **Figura 3**.

Figura 3

Figura 4

Neste último caso os números poderão ser representados por cubos de encaixe em que cada cubo corresponde a uma unidade (Vide **Figura 4**). Esta alternativa não é tão adequada pois torna- se mais difícil visualizar, de imediato, os números correspondentes às quantidades que se colocam em cada um dos pratos da balança. Em qualquer dos casos, é fundamental que a balança sem pesos ou com os pratos vazios esteja bem equilibrada.

Este material é importante, para que se possam testar hipóteses obtidas através do estabelecimento de relações entre números. A primeira questão da tarefa visa, fundamentalmente, favorecer a apropriação do funcionamento da balança e o modo como deve ser usada. Matematicamente a resolução remete para a identificação de dois números cuja soma é 8. Há várias possibilidades. Entretanto, nem todas são soluções da tarefa, por exemplo, não se pode equilibrar a balança pendurando dois pesos em 4 pois, apesar de 4+4 ser igual a 8, apenas é possível, pelo enunciado, pendurar um peso sob cada número. Além disso, embora 8 possa decompor em 5+3 e 3+5, qualquer uma destas decomposições corresponde a colocar um peso no 3 e outro no 5, por isso não se pode considerar as soluções diferentes.

Há três soluções para a questão 1: pendurar um peso em 1 e outro em 7; um em 2 e outro em 8 e um em 3 e o outro em 5. É importante que todas soluções que surjam sejam discutidas pela turma, bem como as respectivas justificações, pois esta atividade facilita a resolução das questões seguintes. Para incentivar os alunos a verificarem as possibilidades, poder-se colocar, por exemplo, questões do tipo:

- Se colocar no braço direito da balança um peso em 3 e outro em 10 a balança ficará equilibrada? Por quê?
- Onde poderão ser pendurados os pesos no braço direito da balança? Por quê?

(Adaptado de Projecto de Formação de Formadores de Professores para o Ensino Primário em Angola, pp. 21-26, 2010)

B) NÚMEROS, OPERAÇÕES E SUAS PROPRIEDADES

A exploração das relações dos números, operações e suas propriedades na perspectiva do pensamento relacional envolve a capacidade de analisar expressões e equações como um todo ao invés de um processo fragmentado e logo, deve ser feito uma aproximação desde os primeiros anos de escolaridade. Nesse sentido os questionamentos do professor exerce um papel crucial no desenvolvimento desse pensamento, pois mobiliza o aluno a justificar como chegou naquele resultado, explicar como pensou, desenvolvendo a capacidade de generalizar (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). Portanto, a generalização acerca dos números, suas operações e propriedades, bem como o raciocínio acerca de relações entre números constituem, segundo Kaput (2008) a Aritmética Generalizada.

O foco em tarefas que exploram as relações entre os números, operações e suas propriedades (Aritmética Generalizada) nos anos iniciais não estão no uso de nomenclaturas associadas à comutatividade, elemento neutro, associatividade, distributividade, por exemplo, mas especialmente, na compreensão de como essas relações entre os números contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico, ultrapassando o olhar sobre o sinal de igual apenas como uma função operacional com foco em seu sentido mais amplo, que é o de equivalência, enfatizando a necessidade e importância dos professores ensinarem para as crianças como também conhecer o conteúdo, inclusive para compreender a natureza dos erros dos alunos, suas origens e os porquês matemáticos, antecipando dificuldades e superações.

VERDADEIRO OU FALSO?

Objetivo: resolver tarefas que envolvam números, operações e suas propriedades.

Público: alunos de 4º e 5º anos

Possibilidades de discussão: A atividade busca discutir os diferentes significados do sinal de igualdade (relacional, operacional e de equivalência) por meio dos números, suas operações e propriedades, das evidências da capacidade de generalização a partir das igualdades que permitem a justificação/argumentação e a identificação das propriedades das operações, sem necessariamente ter que recorrer aos cálculos.

IGUALDADES	V	F	JUSTIFICATIVA
1 x  = 			
21 = 44 - 13 + 13			
35 = 35 + 12			
* + 0 = *			
(23 + 12) – 8 = 23 + (12 – 8)			
(2 x 14) + (3 x 14) = 5 x 14			
(12 x 18) - (12 x 8) = 12 x 10			

(Adaptado de Mestre; Oliveira, 2011)

C) SEQUÊNCIAS, PADRÕES, REGULARIDADES E GENERALIZAÇÃO

Tarefas que exploram sequências (numéricas ou pictóricas, crescentes ou repetitivas), padrões e regularidades devem percorrer, ao longo da Educação Básica, para que o aluno gradativamente seja capaz de desenvolver sua habilidade de generalização. Esclarecemos, conforme Borralho et al (2007) que o padrão de uma sequência pode ser entendido como "uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades" (p.1).

Enfatizamos que o trabalho pedagógico voltado para as explorações de padrões e sua representação (geometricamente ou numericamente), possibilita uma maior acessibilidade à Matemática evidenciando seu valor e beleza. Essa aproximação contribui para o desenvolvimento do raciocínio e de conexões entre as diversas áreas da Matemática de maneira intuitiva e informal, progressivamente avançando para o estudo da Álgebra, mais que isso, desenvolvendo a capacidade de generalização, cerne do pensamento algébrico (Alvarenga; Vale, 2007; Borralho et al, 2007; Abrantes; Serrazina; Oliveira, 1999).

Regularidades nas tabuadas - A descoberta de regularidades numéricas

Objetivo: explorar as relações numéricas usando como contexto os múltiplos e divisores de um número natural, reconhecendo regularidades.

Público: alunos de 3º e 4º anos

Possibilidades de discussão: exemplos de múltiplos e de divisores de um número natural; compreensão que os divisores de um número são divisores dos seus múltiplos (e que os múltiplos de um número são múltiplos dos seus divisores); exploração das regularidades numéricas; identificação das regularidades nos múltiplos de 3, 6 e 9 e desenvolvimento da capacidade de generalização.

1. Observa com atenção a tabuada do 3 (os primeiros dez produtos)
2. O que há de curioso nesta tabuada? Descobre algumas regularidades e registre-as
3. Continue a tabuada do 3, calculando 11x3, 12x3, 13x3,...
4. As regularidades que descobriu mantêm-se? Por quê?

0x3 = 0

1x3 = 3

2x3 = 6

3x3 = 9

4x3 = 12

5x3 = 15

6x3 = 18

7x3 = 21

8x3 = 24

9x3 = 27

10x3 = 30

11x3 = 33

12x3 = 36

13x3 = 39

14x3 = 42

15x3 = 45

16x3 = 48

17x3 = 51

18x3 = 54

19x3 = 57

20x3 = 60

[1] Atividade adaptada de Mestre (2014)

Descubra o segredo

Objetivo: identificar padrões e regularidades presentes nas sequências dadas e estabelecer relações entre os termos, identificando uma lei de formação que permita continuar a sequência e chegar à generalização.

Público: alunos de 1º ao 5º ano

Possibilidades de discussão: Por meio das sequências 2 e 4 apresentadas é possível desenvolver discutir a habilidade de “ Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades” (BRASIL, 2017). Ou seja, no caso da sequência 2, formada por um padrão de quatro elementos, para determinarmos a figura correspondente a uma posição qualquer, basta dividir essa posição por 4, os restos dessa divisão só poderão ser 0, 1, 2 ou 3. Quando esse resto for zero, corresponderá a última figura do padrão (losango), se for 1, o círculo, 2 o coração e 3, paus. O professor também poderá discutir, porque não é possível encontrar outros restos. A mesma ideia se aplica a sequência 4, porém o padrão é formado por 11 elementos.

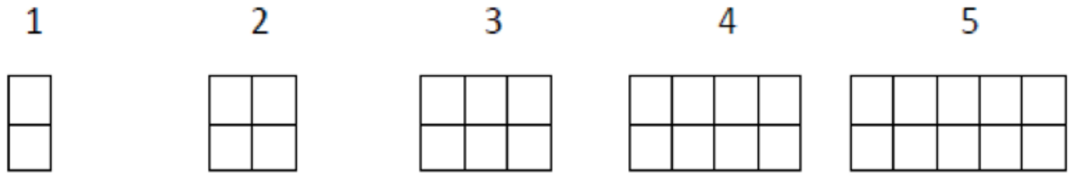
Sequência 1

▶▼▶▼▶▼▶

Sequência 2

○♡♣◆○♡♣◆

Sequência 3



Sequência 4 (apenas para 4º e 5º anos)

Observe a sequência dada (1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5,1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5,...). Supondo que esta lei de formação desta sequência permaneça, qual será o termo que ocupará a 143ª posição?

As tarefas algébricas apresentadas envolvendo os principais elementos caracterizadores do pensamento algébrico (Aritmética Generalizada e Pensamento Funcional), no âmbito da formação inicial e continuada, merecem ser discutidas, a partir do olhar do aluno e do professor, em perspectivas diferentes. Do professor, elencando aspectos conceituais para compreensão do erro do aluno, do planejamento de tarefas e intervenções. Do aluno, em oportunizar o seu exercício constante de conjecturar, analisar, identificar, comparar, selecionar estratégias, argumentar e justificar o que pensou. Tais práticas reflexivas e colaborativas, possibilitam uma aproximação cada vez maior para o desenvolvimento da capacidade de generalização do indivíduo, reduzindo a ruptura brusca que vem ocorrendo entre o ensino Aritmética e da Álgebra, principalmente.

FINALIZANDO...

Os professores e futuros professores dos anos iniciais apresentam diferentes percursos escolares em Matemática, com distintas experiências de aprendizagem em Álgebra, mais especificamente, e revelam, consequentemente, diferentes conhecimentos e sentimentos em relação ao ensino deste tema. Em razão disso, tanto na formação inicial como continuada, é primordial oferecer experiências de aprendizagem que lhes possibilitem o desenvolvimento dos diferentes elementos do pensamento algébrico.

Conforme Vale et al. (2009), no campo do desenvolvimento curricular em Matemática, uma das significativas potencialidades da exploração de tarefas com padrões, decorre certamente da contribuição delas para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Esses autores defendem ainda que, tal ideia distancia-se daquela visão da Álgebra exclusivamente associada à manipulação de expressões simbólicas envolvendo variáveis, pois para eles, a Álgebra é, sobretudo, uma maneira de pensar, um método para ver e expressar relações que possibilita importantes instrumentos para compreender o mundo.

Neste contexto, considera-se que o desenvolvimento do pensamento algébrico deve ocorrer transversalmente no currículo de Matemática, e em todos os níveis de ensino. Sendo importante, principalmente, que os alunos experenciem desde os primeiros anos de escolaridade, a procura pelas regularidades, pelas relações e a sua generalização, pois estes aspectos são componentes fundamentais para o desenvolvimento dessa forma de pensamento matemático. Para tanto, o conhecimento especializado do professor que ensina Matemática, no que se refere ao seu Conhecimento Matemático, do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e crenças (*beliefs*) que afetam e perpassam diretamente todo esse processo deve ser objeto de reflexão e ressignificação na formação inicial e continuada.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P., SERRAZINA, Lurdes. e OLIVEIRA, I. **A Matemática na Educação Básica**. Lisboa: Departamento da Educação Básica, Ministério da Educação, 1999.

ALVARENGA, Dina e VALE, Isabel. A exploração de problemas de padrão. Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Quadrante**, XV, 1, 27-55, 2007.

ANGOLA. Ministério da educação.**Relatório da fase de experimentação do ensino primário e do 1º ciclo do ensino secundário**. Luanda: Inide, 2010

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for research in mathematics education**, p. 412-446, 2005.

BORRALHO, Antonio. CABRITA, Isabel, PALHARES, Pedro e VALE, Isabel. Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), **Números e Álgebra**. Lisboa: SEM-SPCE, p. 193-211, 2007.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL (País). Secretaria da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio – Matemática.** Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Elementos conceituais e metodológicos para a definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3ºanos) do Ensino Fundamental.** Brasília: MEC/SEF, 2012.

BRASIL. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf>. Acesso em: 27 de jun de 2019.

BRITO, Márcia Regina Ferreira de. **Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática em estudantes de 1º e 2º graus**. Tese (Livre Docência) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 383 f, 1996.

CANAVARRO, Ana Paula. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, Lisboa-PT, v. 16, n. 2, p. 81-118, 2007.

CARRAHER, David. W., SCHLIEMANN, Analúcia D., BRIZUELA, Bárbara M., & EARNEST, Darrell Arithmetic and algebra in early Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**, *2*(37), 87-115, 2006.

CARRILLO, José; CLIMENT, Nuria; CONTRERAS, Luiz C.; MUÑOZ-CATALÁN, M. Cinta. **Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching**. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8) (8. ed., pp. 2985-2994). Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara, 2013.

FERREIRA, Mirian Criez Nóbrega. Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: uma análise do conhecimento matemático acerca do Pensamento Algébrico. 2017.147 fls. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática, Santo André, 2017.

KAPUT, James. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J.; CARRAHER, D. & BLANTON, M. (Eds.). **Algebra in the early grades.** New York: Lawrence Erlbaum Associates, p. 5 - 17, 2008.

KIERAN, Carolyn. Concepts associated with the equality symbol. Educational Studies in Mathematics, 12, p. 317 - 326, 1981.

KIERAN, Carolyn. Cognitive processes involved in learning school algebra. Mathematics and Cognition. **A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Edited by, Pearla Nesher and Jeremy Kilpatrick. Cambridge University Press. First Published. p.96-112, 1990.

MESTRE, Célia Maria Martins Vitorino. **O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4º ano de escolaridade: uma experiência de ensino.** 2014. 379 f. Trabalho de conclusão de curso (Tese) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014.

MESTRE, Célia Maria Martins Vitorino; OLIVEIRA, Hélia Margarida Pintão de. **O pensamento algébrico e a capacidade de generalização de alunos do 3.º ano de escolaridade do ensino básico**. In: GUIMARÃES, Célia Maria; REIS, Pedro Guilherme Rocha dos. (Org.) **Professores e infâncias:** estudos e experiências. São Paulo: Junqueira & Marin, p. 201-223, 2011.

PONTE, João Pedro; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. Álgebra no ensino básico. Lisboa: Ministério da Educação, 2009.

NCTM. 2007. NATIONAL COUNCIL FO TEACHER OF MATHEMATICS. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar.** Trabalho original publicado em 2000. Tradução da Associação de Professores de Matemática (APM). Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de lnovação Educacional, 2007.

QUINTILIANO, Luciane de Castro. **Conhecimento declarativo e de procedimento na solução de problemas algébricos**. Dissertação Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, 2005.

QUINTILIANO, Luciane de Castro. **Relações entre os estilos cognitivos, as estratégias de solução e o desempenho dos estudantes na solução de problemas aritméticos e algébricos.** Tese Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil, 2011.

SANTANA, Roseli Regina Fernandes. **Um estudo sobre as relações entre o desenvolvimento do pensamento algébrico, as crenças de autoeficácia, as atitudes e o conhecimento especializado de professores *pre-service* e *in-service*.** 2019. 321 fls. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2019.

SANTANA, Roseli Regina Fernandes; QUINTILIANO, Luciane de Castro. **O desenvolvimento do pensamento algébrico com alunos dos anos iniciais do ensino fundamental em ambientes virtuais de aprendizagem.** In: XIII Encontro Paulista De Educação Matemática, 2017, São Paulo. Anais Do XIII Epem 2017, 2017. p. 1-2111.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista.** Secretaria da Educação; coordenação geral, Herbert Gomes da Silva. – São Paulo : SE, 2019. 526 p.

SOUZA, Eliane Reame e DINIZ, Maria Ignez de S. Vieira. Álgebra: das variáveis às equações e funções. 2 ed. São Paulo: IME-USP, 1996. 111 p.

VALE et al. **Padrões no ensino e aprendizagem da Matemática: propostas curriculares para o ensino básico**. Viana do Castelo: ESE/IPVC, 2009.

WONG, P. H. M., Numbers versus letters in algebraic manipulation: which is more difficult? **Proceedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** PME). Edited by Pehkonen. Lahti: Finlândia. vol. 4, p.289, 1997.

Capítulo 3

O PROCESSO DE ABSTRAÇÃO DO CONCEITO DE POLÍGONO: UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Marcelo Carlos de Proença

INTRODUÇÃO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) já indicavam a importância de se explorar e ampliar a capacidade de abstração dos alunos por meio do direcionamento da aprendizagem via descoberta sobre as regularidades e as propriedades de conceitos aritméticos, algébricos e geométricos. Assim, essa capacidade de abstração deve ser favorecida no sentido de que "[...] as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados […] e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos" (BRASIL, 1998, p. 63).

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017, p. 263), a Matemática apresenta sistemas abstratos que "[...] contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos." Nesse sentido, na BNCC (BRASIL, 2017), indica-se que a área da Matemática, no ensino fundamental, deve proporcionar aos alunos que associem representações como, por exemplo, figuras e esquemas, a conceitos e propriedades.

Isso significa que o ensino em sala de aula que valoriza a apresentação primeira das definições, regras, fórmulas e procedimentos matemáticos pouco contribui para favorecer a construção conceitual. Quando esse tipo de ensino acontece, é possível afirmar que ocorre ausência deum trabalho direcionado ao processo de abstração dos conceitos, pois o foco acaba sendo os conhecimentos procedimentais. Segundo a visão de Gonçalez e Brito (2001), a construção de conhecimento matemático pelos alunos decorre de uma elaboração mental, e quando recebem esse conhecimento diretamente formalizado, podem ter dificuldades para fazer abstrações.

Um exemplo de sistema abstrato seria aquele que envolve conceitos da área de geometria, cuja importância já era evidenciada por Fainguelernt (1999, p. 49-50), segundo a qual “a Geometria desempenha um papel integrador entre as diversas partes da Matemática, além de ser um campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar.”

Nesse sentido, um conceito geométrico importante a ser abordado em sala de aula seria o de polígono. Assim, buscamos, neste artigo, apresentar uma proposta de ensino, voltada a uma condução do processo de abstração do conceito de polígono.

Encontramos estudos que propuseram e implementaram sequências didáticas para levar os alunos a compreenderem o conceito de polígono (DOMINGOS, 2010; SENA, 2014; BARBOSA, 2018). Dessa forma, as pesquisas de Domingos (2010) e Barbosa (2018), que envolveram alunos de sexto ano do ensino fundamental, mostraram que foi possível levá-los a desenvolver a compreensão sobre as características de polígono e identificação de suas figuras, bem como levá-los a construir uma ideia sobre o significado de polígono.

Esses estudos acima revelaram a importância de se propor um ensino que foca a construção de conhecimentos pelos alunos. Já o estudo de Sena (2014), que abordou a elaboração e reelaboração do conceito de polígono de cinco alunos de oitavo ano de ensino fundamental, evidenciou que três desses alunos não conseguiram, já na primeira sessão da intervenção aplicada em sala de aula, apresentar características de polígono e citar figuras que são polígonos, dando maior enfoque a apenas triângulos e quadrados. Esse resultado revelou que mesmo alunos de oitavo ano ainda apresentam pouca formação do conceito de polígono.

Diante do exposto, identifica-se que, quando há uma intervenção elaborada para favorecer a construção de conceitos geométricos, é possível direcionar os alunos à aprendizagem significativa. Desse modo, no presente capítulo, apresentasse uma proposta de ensino, a ser desenvolvida em sala de aula, no 5.º ano do ensino fundamental, que adota como fundamento ao trabalho de formação de conceitos os pressupostos teóricos relativos às ideias de Dreyfus (1991), referente aos processos do *pensamento matemático avançado*, tendo como principal o processo de abstração.

Assim, o presente capítulo foi estruturado nas seguintes seções: a) fundamentação da prática de ensino com base nos princípios teóricos sobre os processos do pensamento matemático avançado de Dreyfus (1991); b) apresentação das indicações sobre a abordagem de polígono, segundo a BNCC (BRASIL, 2017), para tratá-lo em sala de aula; c) apresentação da estrutura geral da proposta de ensino de polígono, com base nas etapas de ensino proposta por Dreyfus (1991): (i) utilizar mais de uma representação do conceito, (ii) estabelecer relações entre as representações, (iii) integrar as representações; d) descrição da proposta de ensino, detalhando as ações de ensino necessárias do professor para a condução do processo de abstração do conceito geométrico polígono.

Finalmente, a proposta de ensino visa contribuir para a construção de conhecimentos pedagógicos aos professores dos anos iniciais (pedagogos e futuros pedagogos), bem como um olhar para conhecimentos matemáticos, servindo como base teórico-prática para poderem organizar suas aulas e conduzir seus alunos à aprendizagem significativa do conceito de polígono. Trata-se, assim, de favorecer-lhes conhecimentos que fazem parte dos saberes da formação profissional e disciplinar do professor, conforme indicou Tardif (2007), referentes, respectivamente, ao saber pedagógico e ao saber de Matemática.

O PROCESSO DE ABSTRAÇÃO NO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

De acordo com Dreyfus (1991), os processos do pensamento matemático avançado envolveriam quatro processos mentais, necessários para favorecer a abstração de um determinado conceito matemático. Os dois processos mentais principais seriam a representação e a abstração. Já os outros dois, generalização e síntese, corresponderiam a processos mentais considerados pré-requisitos para se atingir a abstração. Segundo esse autor, a abstração é o mais importante dos processos mentais avançados.

> Se um estudante desenvolve habilidade para conscientemente fazer abstrações a partir de situações matemáticas, ele alcança um nível avançado de pensamento matemático. Alcançar essa capacidade de abstrair pode muito bem ser o único objetivo mais importante da educação matemática avançada. (DREYFUS, 1991, p. 34, tradução nossa).

O início do processo de abstração do conceito matemático se dá, segundo Dreyfus (1991), pelo processo de **representação,** ou seja, gerar um exemplo do conceito. No âmbito do aspecto matemático, temos as representações simbólicas, direcionadas aos signos e símbolos matemáticos. Já no âmbito dos aspectos da aprendizagem e do pensamento em Matemática, temos as representações mentais, isto é, as imagens mentais construídas pelo indivíduo. Assim, o autor enfatizou que:

> Representar um conceito, então, significa gerar uma instância, espécime, exemplo, imagem do mesmo. [...] Uma **representação simbólica** é externamente escrita ou falada, usualmente com o objetivo de fazer uma comunicação sobre o conceito mais facilmente. Uma **representação mental**, por outro lado, refere-se a esquemas ou estruturas internas de referência que uma pessoa utiliza para interagir com o mundo externo. É o que ocorre na mente quando se pensa em determinada parte do mundo externo e pode variar de pessoa para pessoa. (DREYFUS, 1991, p. 31, tradução nossa).

Como exemplo, o autor cita o caso do conceito de função, esclarecendo que se trata de um conceito abstrato que envolve representações gráfica e algébrica, ou seja, representar o conceito de função implica em apresentar/gerar um exemplo/imagem desse conceito que pode ser gráfico ou algébrico.

Após esse processo de representação de um conceito, para atingir sua abstração é importante o desenvolvimento dos processos de generalização e de síntese. Sobre a **generalização**, Dreyfus (1991, p. 35, tradução nossa) definiu que "generalizar é derivar ou induzira partir de elementos, para identificar pontos em comum, para expandir os domínios de validade." O autor citou como exemplo o fato de conhecer que se (a) uma equação linear com uma variável que tem uma solução, e (b) sistemas de duas (ou três)variáveis de duas (ou três) equações possuem uma única solução, então, ao analisar os casos particulares n=1, n=2 e n=3, a pessoa pode generalizar para sistemas de n equações lineares de n variáveis, conjecturando que, assim, há uma única solução.

No caso do processo de **síntese**, Dreyfus (1991, p. 35, tradução nossa) definiu que "sintetizar significa combinar ou compor as partes de tal maneira que elas formem um conjunto, uma entidade." O autor sustentou queesse conjunto/entidade é mais do que a soma de suas partes. Assim, como exemplo, cita que no caso da solução de sistemas de equações lineares, quando esses sistemas são mesclados em um único quadro para serem, em seguida, interrelacionados, favorece-se à síntese.

Apesar da importância dessa mescla que leva à síntese, Dreyfus (1991) chamou a atenção para o fato de que se trata de um processo pouco explorado em sala de aula. Segundo esse autor, geralmente os professores já fazem a sumarização dessa mescla ao indicar diretamente aos alunos quais são as conexões e relações existentes etc. Desse modo, para Dreyfus (1991), trata-se de uma transmissão do que os matemáticos veem e não focado nos que os estudantes podem fazer.

Por fim, a generalização e síntese feitas pelo indivíduo e devidamente conduzidas pelo professor, direcionam-se à abstração do conceito matemático. Assim, o significado de **abstração** e de seu processo é o seguinte:

> Abstração é em primeiro lugar um processo *construtivo* – a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, isto é, a partir de propriedades e de relações entre objetos matemáticos [equações, números, funções etc.]. Este processo é dependente do isolamento de propriedades e relações adequadas. Exige a capacidade de mudar a atenção a partir dos próprios objetos para a estrutura de suas propriedades e relacionamentos. Tal atividade mental construtiva por parte de um estudante é fortemente dependente da atenção que está sendo focada por esse aluno nessas estruturas que constituam parte do conceito abstrato e, afastadas daquelas que são irrelevantes no contexto que se destina; a estrutura se torna importante, enquanto os detalhes irrelevantes estão sendo omitidos, reduzindo, assim, a complexidade da situação. (DREYFUS, 1991, p. 37, grifo do autor, tradução nossa).

De acordo com a citação acima, o significado de abstração evidencia o uso de estruturas matemáticas para a construção de estruturas mentais. Isso porque, segundo Dreyfus (1991), em muitos casos, os quatro processos mentais envolveriam, ao mesmo tempo e de forma articulada, aspectos matemáticos e psicológicos. "De fato, é precisamente esta articulação [entre representações simbólica e mental] que faz dos processos interessantes e relevantes à compreensão da aprendizagem e do pensamento na matemática avançada (DREYFUS, 1991, p. 26, tradução nossa).

Além disso, o que promove o processo de abstração seriam o "isolamento de propriedades e relações", "mudança de atenção nas estruturas", "omissão dos detalhes irrelevantes", todas envolvendo atividades mentais do estudante sobre o conceito. E essas atividades mentais estariam sendo favorecidas pelos processos subjacentes de generalização e síntese. Diante disso, Dreyfus (1991) deixou clara a importância de o estudante ter ricas representações mentais de um conceito, ou seja, representações fortemente articuladas. Nesse processo de abstração, o autor destacou que a visualização teria papel importante na abstração quando se está tratando das relações entre objetos concretos.

Diante dessas considerações sobre os quatro processos mentais, Dreyfus (1991) apontou uma sugestão de trabalho didático para favorecer o processo de aprendizagem de um determinado conceito matemático. Tal trabalho didático consistiria de uma sequência de quatro estágios:

- *Utilizar uma única representação* – nesse processo de aprendizagem, o início se daria a partir do uso de um caso concreto, ou seja, de uma única representação do conceito matemático.

- *Utilizar mais de uma representação em paralelo* – corresponde a um segundo estágio em que várias representações de um mesmo objeto matemático devem ser consideradas em paralelo. Desse modo, a transição dessas representações para o conceito abstrato vai depender do modo como se estabelecem as relações entre tais representações.

- *Fazer relações entre representações paralelas* – quando se propicia a compreensão de relações consistentes entre as várias representações, os estudantes podem ter condições de compor representações que acabam favorecendo-lhes a oportunidade de ter ciência do conceito subjacente. Desse modo, isso acaba influenciando positivamente na abstração do conceito.

- *Integrando representações e comutando-as de forma flexível* – nesse quarto estágio, como forma ainda parcial do processo de abstração, estaria acontecendo o processo de integração entre as diferentes representações, ou seja, um processo de síntese. Nessa síntese, os aspectos específicos das representações do conceito seriam considerados, sendo crucial o fato de se evidenciar os vínculos, relações e propriedades comuns que foram identificados e que, assim, permitiriam elucidar o conceito abstrato. Contudo, ao completar todo esse processo, o estudante passa a ter uma noção do conceito abstrato, passa a ser, particularmente, o "dono" do conceito.

Sobre o primeiro estágio, envolvendo o uso de uma única representação do conceito, Dreyfus (1991) enfatizou que se deve tomar maior precaução porque quando se utiliza uma única representação de determinado conceito, o foco da atenção pode ser desviado para essa representação e não no objeto abstrato.

No caso do estágio sobre o uso de mais de uma representação, Dreyfus (1991) enfatizou que o uso de vários exemplos de um conceito possibilita focar os pontos comuns, o que levaria os estudantes a dar maior atenção em propriedades e relações que os direcionariam a desenvolver a abstração. Para o autor, quando se consideram várias representações, as relações existentes no conceito abstrato podem ser abordadas e, assim, pode-se realizar um trabalho específico envolvendo o conceito. Desse modo, é importante abordar representações concretas de um conceito, justamente para favorecer o aprimoramento do pensamento no sentido de o estudante ser capaz de apontar uma representação particular, advinda de sua imagem mental dessa representação particular.

Para Dreyfus (1991), esse aprimoramento do pensamento pode ser ampliado se o estudante consegue, assim, ao mesmo tempo, dispor de várias representações para fazer uso. Por isso, para o autor, representação e abstração são processos complementares, pois envolvem esse momento de aspectos matemáticos (representações concretas de objetos matemáticos) articulados aos aspectos cognitivos (imagem mental). Do ponto vista da aprendizagem:

> Por um lado, um conceito é frequentemente abstraído a partir de várias de suas representações, por outro lado representações são sempre representações de um determinado conceito abstrato. (DREYFUS, 1991, p. 38, tradução nossa).

Diante desse processo de aprendizagem que levaria um estudante a abstrair um conceito de Matemática, o autor enfatizou que a importância de o estudante abstrair um conceito é a de ser capaz de controlá-lo em termos das representações que se quer utilizar. E esse controle é importante para o uso dessas representações na resolução de problemas que envolvem tal conceito.

Dessa maneira, logo após tecermos considerações sobre a abordagem a ser dada, em sala de aula, sobre o conceito geométrico de polígono, indicadas na BNCC (BRASIL, 2017), passamos a apresentar nossa proposta de ensino para favorecer o processo de abstração do conceito de polígono.

O CONCEITO DE POLÍGONO NA BNCC

Na BNCC (BRASIL 2017), a divisão da área de Matemática está centrada em cinco Unidades Temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. No caso da Geometria, para os anos iniciais e anos finais do ensino fundamental, destaca-se que o estudo de seus conceitos e procedimentos ajuda a desenvolver o pensamento geométrico dos alunos, no sentido de que “esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes” (BRASIL, 2017, p. 269).

Nessa Unidade Temática Geometria, há a indicação de Objetos de Conhecimento (OC) (conteúdos matemáticos) e de habilidades a serem desenvolvidas, tendo como princípio o seguinte: “Em todas as unidades temáticas, a delimitação dos objetos de conhecimento e das habilidades considera que as noções matemáticas são retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a ano” (BRASIL, 2017, p. 274).

Assim, para o conteúdo referente a polígonos, a primeira abordagem sugerida a ser feita em sala de aula é para o 5º ano do ensino fundamental, a saber: OC – “Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos” (BRASIL, 2017, p. 294). Apesar de menção a figuras geométricas planas, a habilidade mencionada revela que se trata de abordar os polígonos: “Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais” (BRASIL, 2017, p. 295).

Nessa etapa da BNCC (BRASIL, 2017), que se refere aos anos iniciais do ensino fundamental, o foco é pelo trabalho que favoreça a compreensão dos alunos:

> Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. [...] Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BRASIL, BNCC, 2017, p. 274).

Diante disso, entendemos que essa primeira abordagem permite um ensino de cunho conceitual a ser feito sobre o significado de polígonos, o que possibilita levar os alunos a construírem e desenvolverem a abstração desse conceito. Dessa forma, o ensino de polígonos enseja um trabalho que leve os alunos ao reconhecimento das formas geométricas que seriam polígonos, com base em suas características e representações, voltado à compreensão desse conceito, base para processos escolares posteriores à formalização matemática.

A PROPOSTA DE ENSINO DE POLÍGONO

Com base nos estágios de trabalho didático de Dreyfus (1991), elaboramos uma proposta didática para abordar o conceito de polígono. Tomamos como referência ao ensino o uso de várias representações desses conceitos, o que nos levou a propor as seguintes etapas:

- *Etapa 1: Utilizar mais de uma representação do conceito* – nesta etapa, deve-se, primeiramente, obter a estrutura matemática a ser adotada como referência, ou seja, uma definição de polígono. Destacamos que essa situação não foi apontada por Dreyfus (1991), porém entendemos ser importante para definir as representações que fariam parte do ensino em sala de aula, uma vez que há definições que envolvem exemplos não contemplados em outras definições. Dessa forma, propormos que as representações de polígono a serem utilizadas sejam obtidas após uma discussão em meio aos seus não exemplos. Assim, a obtenção de várias representações de polígono consiste em criar conjuntos que implicam no processo de representação;

- *Etapa 2: Estabelecer relações entre as representações do conceito* – nesta etapa, deve-se direcionar os alunos a estabelecerem relações entre as representações do conceito de polígono, ou seja, direcioná-los a identificar pontos comuns. Quando os alunos identificam pontos comuns e conseguem apresentar outras representações dos conceitos com base nas relações estabelecidas, aproximam suas ideias do conceito subjacente. Trata-se de favorecer aos alunos que desenvolvam o processo de generalização, justamente porque na tentativa de estabelecer relações entre as representações, podem ter condições de identificar outras representações do conceito de polígono.

- *Etapa 3: Integraras representações do conceito* – por fim, esta etapa implica de o professor direcionar os alunos a integrarem as representações, ou seja, realizarem a síntese das relações identificadas nessas representações. O professor deve solicitar aos alunos que descrevam sobre o que seriam, segundo os entendimentos construídos, as representações estudadas (as de polígono), buscando verificar se conseguem integrar os aspectos específicos das representações, revelando os vínculos, relações e características comuns. Ao final, o professor pode dizer os nomes das representações, revelando tratar-se do conceito de polígono.

Dessa forma, ao desenvolver as três etapas em sala de aula, os alunos podem vivenciar e se envolver com os processos de representação, generalização e síntese, favorecendo o processo de abstração dos conceitos estudados. Ao final, os alunos estariam aptos a apresentar uma descrição que se aproxima da estrutura matemática pertinente, compreendendo suas características específicas e formas de representação, situação esta que revela a aquisição/desenvolvimento do conceito abstrato de polígono.

DESCRIÇÃO DA PROPOSTA DE ENSINO AO CONCEITO DE POLÍGONO

Com base na BNCC (BRASIL, 2017), essa proposta de ensino para favorecer a construção do processo de abstração do conceito de polígono é para ser desenvolvida no 5º ano do ensino fundamental, o que leva em consideração direcionar os alunos a reconhecerem as diferentes representações de polígono. A forma de condução das aulas segue as etapas anteriormente assumidas.

ETAPA 1: UTILIZAR MAIS DE UMA REPRESENTAÇÃO DO CONCEITO DE POLÍGONO

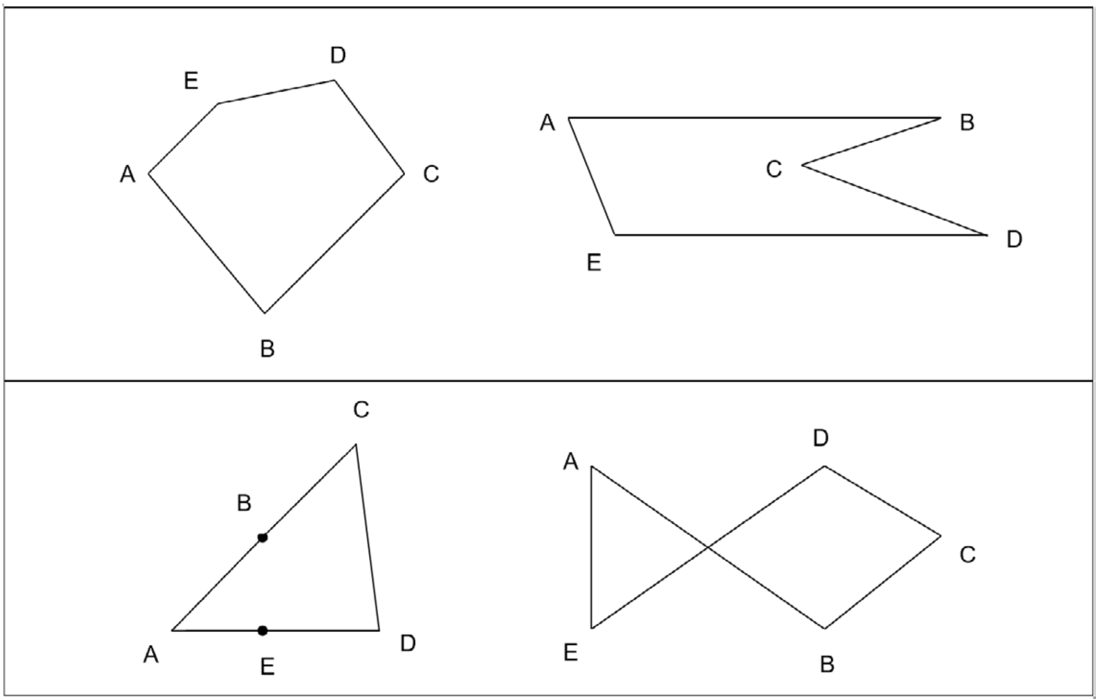
Inicialmente, é importante mencionar que há definições de polígono – estruturas matemáticas –que apontam algumas características diferentes e, assim, representações distintas. Isso foi apontado no estudo de Proença e Pirola (2009) ao apresentarem algumas definições de polígono. Esses autores apresentaram definições que consideravam como exemplos de polígono (representações simbólicas) as figuras que tinham somente o contorno (seus lados) e outras, o contorno e mais a região interna. Além disso, esses autores verificaram que dentre as definições que consideravam apenas o contorno das figuras, uma delas assumiu a figura estrelada/entrelaçada como exemplo de polígono.

Desse modo, adotamos para esta proposta de ensino a definição de Barbosa (1985, p. 38, grifos do autor) sobre a estrutura matemática de polígono porque é mais clara sobre os atributos que definem as figuras que são seus exemplos, a saber:

> Uma *poligonal* é uma figura formada por uma seqüência de pontos $A_1, A_2,..., A_n$ e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,..., A_{n-1}A_n$. Os pontos são os *vértices* da poligonal e os segmentos são seus *lados*.
>
> Um *polígono* é uma poligonal em que as seguintes condições são satisfeitas: (a) $A_n = A_1$, (b) os lados da poligonal somente se interceptam em suas extremidades, (c) cada vértice é extremidade de dois lados, (d) dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Em sequência, o autor apresenta duas figuras que representam um polígono e duas que não o representam:

Figura 5 – Exemplos e não exemplos de polígono.

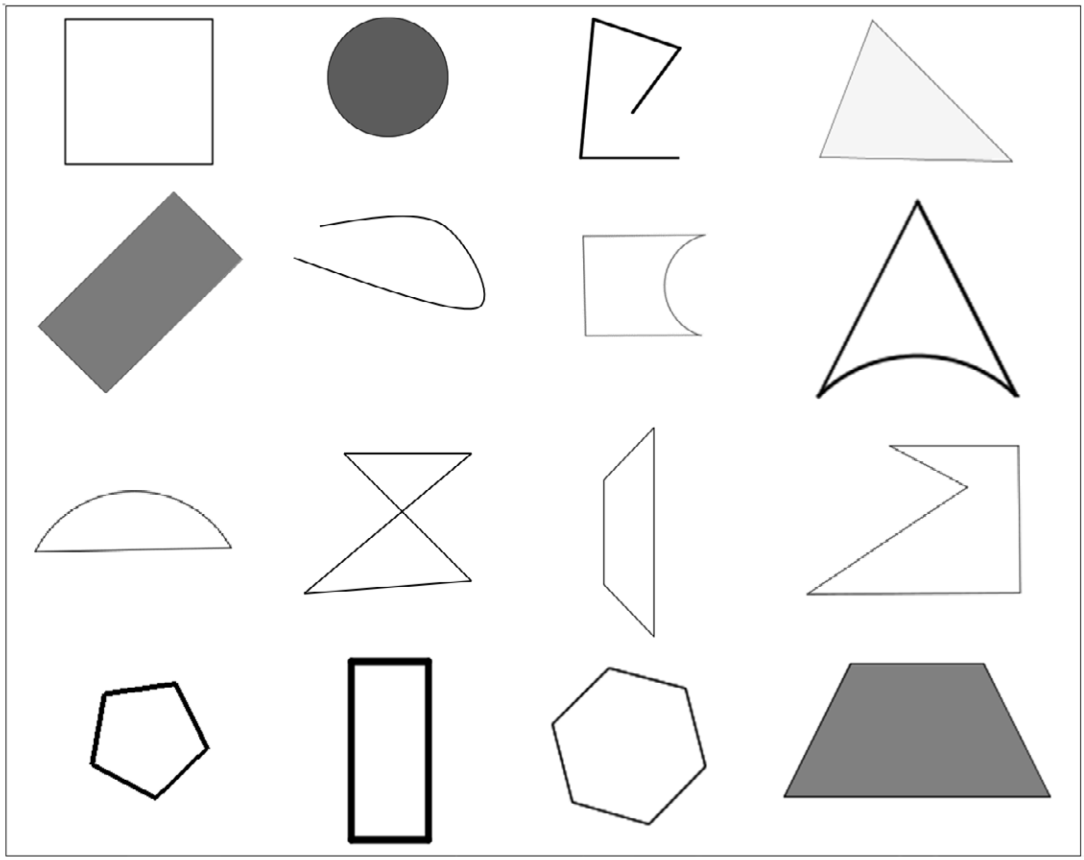


Fonte: Barbosa (1985).

As duas figuras da mesma linha são exemplos de polígono e as duas da linha abaixo são não exemplos. No caso dos não exemplos, a primeira figura não está de acordo com a letra (d), pois os lados *AB* e *BC* e os lados *AE* e *ED* estão em uma mesma reta. Já a segunda figura não contempla a letra (b), tendo o lado *AB* interceptando o lado *ED*.

Diante disso, no início da aula, distribuir os alunos em grupos e entregar uma folha, contendo o seguinte conjunto: a) representações(exemplos) de polígono, contendo, em algumas delas, detalhes irrelevantes; b) não exemplos, formados apenas de segmentos de reta e abertos; c) não exemplos, formados de pelo menos uma linha curva, sendo abertos e fechados. A figura 6 a seguir mostra uma possibilidade de conjunto de figuras que podem ser utilizadas na aula.

Figura 6 – Exemplos e não exemplos de polígono.



Fonte: O autor.

Solicitar que os grupos observem as figuras e que as separem, segundo a maneira como acharem mais adequada. Alguns conjuntos de figuras que podem ser formados seriam constituídos pelo critério de: i) terem apenas cor interna, o que seria inadequado, pois cor é irrelevante; ii) possuírem apenas lados formados de segmentos de reta, o que englobaria, incorretamente, figuras que são abertas, ou seja, os não exemplos; iii) de serem formadas por segmentos de reta e serem fechadas, o que evidenciaria o conjunto de polígonos. O importante é que os conjuntos formados exigem dos alunos suas atividades mentais, baseado no isolamento de propriedades e de relações que foram estabelecendo entre as figuras.

Dessa forma, o objetivo é que o professor direcione os alunos a separem as figuras em dois conjuntos: polígonos e não polígonos. Assim, neste momento, o importante é que o professor adote como referência o conjunto das representações de polígono para serem abordadas na sequência da aula, situação essa que implica no processo de **representação** de polígonos. A discussão sobre as diferenças e semelhanças ao conjunto dos não polígonos deve ser feita ao final do processo de síntese.

ETAPA 2: ESTABELECER RELAÇÕES ENTRE AS REPRESENTAÇÕES DE POLÍGONO

A partir do conjunto de representações de polígono que foi obtido, os alunos devem estabelecer relações entre essas representações, buscando, a partir de um processo mental, pontos comuns. Trata-se de um levantamento/apontamento sobre os vínculos, relações, características que seriam próprias desse conjunto como, por exemplo, que são representações formadas de segmentos de reta, que são fechadas e até mesmo que a cor ou a espessura das linhas são irrelevantes para caracterizá-las. Após isso, o professor deve solicitar aos grupos que tentem desenhar figuras que fazem parte desse conjunto de representações de polígono.

Veja que a postura acima favorece aos alunos a oportunidade de realizarem um processo mental de **generalização**, uma vez que as poucas representações de polígono que foram utilizadas permitem com que consigam perceber pontos comuns e apontar outras representações. É importante destacar que nesse momento os alunos podem perceber as características, porém, ainda podem não conseguir apresentá-las de forma consciente e organizada.

ETAPA 3: INTEGRAR AS REPRESENTAÇÕES DE POLÍGONO

Por fim, nesta última etapa, essa apresentação organizada corresponde a levar os alunos a integrarem as representações de polígono, isto é, realizar uma **síntese** explicativa sobre essas representações. O professor deve solicitar aos alunos que: a) se baseiem nos vínculos, nas relações e nas características que foram levantadas na etapa anterior e expliquem como definiriam o conjunto formado por essas representações.

Após isso, tecer uma discussão com eles para sintetizar suas ideias no sentido de direcionar suas definições ao que corresponde ao conceito de polígono, ao conceito abstrato: *'as representações possuem lados formados apenas de segmentos de reta, são fechadas, tem lados que se cruzam apenas em seus vértices'.* Assim, o professor deve dizer que tais representações são denominadas de polígonos. Finalizado todo o processo que levou à **abstração** do conceito de polígono, o professor pode solicitar aos alunos que apresentem outras/novas representações com base na definição apresentada.

Por fim, retomar o conjunto de não polígonos (Etapa 1) e discutir os aspectos que as fazem não serem um polígono.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos apresentar uma proposta de condução do processo de abstração, referente ao conceito de polígono, baseado em suas representações simbólicas, no direcionamento ao processo de generalização dessas representações, e no incentivo a realização de uma síntese integradora pelos alunos. Isso foi feito com foco em favorecer aos alunos dos anos escolares sugeridos a construírem estruturas mentais, culminando na abstração desses conceitos.

Entendemos que as representações simbólicas do conceito de polígono, obtidas pelos alunos em aulas como essas permite levá-los a desenvolverem suas estruturas mentais, possibilitando-os construir ricas representações mentais (características essenciais e exemplos) sobre o conceito abstrato de polígono. Dessa forma, pode-se também estabelecer uma aproximação às suas definições matemáticas, criando laços com a simbologia matemática específica.

Contudo, acreditamos que o uso, pelos professores dos anos iniciais, em suas aulas, das propostas de ensino apresentadas pode auxiliá-los a abordarem a formação do conceito de polígono, levando os alunos a abstraírem tais conceitos. O trabalho feito em sala de aula visa justamente articular aspectos matemáticos e cognitivos, o que contribui para que as estruturas de pensamento que são construídas possam ser utilizadas na compreensão de outros conteúdos matemáticos.

Por fim, gostaríamos de destacar que apesar de Dreyfus (1991), em sua sequência didática de quatro estágios, incentivar o uso das representações dos conceitos, a nossa proposta de condução do processo de abstração mostra que é necessário adotar de forma clara uma estrutura matemática a ser tomada como referência. Também gostaríamos de chamar a atenção para o fato de que, antes de abordar as representações simbólicas dos conceitos, decidimos por utilizar representações que não são do conceito, ou seja, o uso de seus não exemplos.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, IMPA, 1985.

BARBOSA, Ana Carolina Igawa. **Aprendizagem significativa do conceito de polígono**: uma sequência didática para o sexto ano do ensino fundamental. 2018. 178 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação Infantil e Ensino Fundamental. 3ª ed. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Secretaria de ensino fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: SEF/MEC, 1998.

DOMINGOS, Jailson. **Um estudo sobre polígonos a partir dos princípios de Van Hiele**. 2010. 272 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação, Vitória, 2010.

DREYFUS, Tommy. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Ed.) **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991, p. 25-41.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação Matemática:** representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999.

GONÇALEZ, Maria Helena Carvalho de Castro; BRITO, Marcia Regina Ferreira de. A aprendizagem de atitudes positivas em relação à Matemática. In: BRITO, M. R. F (Org.). **Psicologia da Educação Matemática:** teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2001. p. 221-234.

PROENÇA, Marcelo Carlos de; PIROLA, Nelson Antonio. Um estudo sobre o desempenho e as dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio na identificação de atributos definidores de polígonos. **Zetetiké**, Campinas – SP, v. 17, n.31, p. 11-45, 2009.

SENA, Rebeca Moreira. **Mosaico tecnológico na formação de conceitos sobre polígonos**: um estudo sobre a lógica dos adolescentes. 2014. 199 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. 8 ed. Petrópolis-RJ: Vozes, 2007.

Capítulo 4

ENSINO-APRENDIZAGEM DE INEQUAÇÕES: UMA PROPOSTA ENVOLVENDO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

Wilian Barbosa Travassos Marcelo Carlos de Proença

INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017, 2018) é um documento oficial brasileiro de caráter normativo, regendo um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos da Educação Básica, em suas diferentes etapas, devem desenvolver. Assim, não se trata de um currículo a ser pontuado, mas de um documento regulamentador para a elaboração dos currículos das escolas brasileiras.

Dentre os fundamentos pedagógicos presentes, destaque-se o foco no desenvolvimento de competências que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC, que por sua vez, são compreendidas em três níveis de ensino: a etapa da Educação Infantil, a etapa do Ensino Fundamental e, a etapa do Ensino Médio.

Referente ao Ensino Fundamental, cujas normativas ao ensino e à aprendizagem são sugeridas na BNCC (BRASIL, 2017), e que corresponde ao nível de ensino foco do presente capítulo, vemos que esta etapa elege-se como a etapa mais longa da Educação Básica, com duração de 9 anos, atendendo estudantes entre 6 e 14 anos em regime regular.

Na etapa do Ensino Fundamental, na qual é subdividida em *anos iniciais* e *anos finais*, nota-se um maior índice de reprovações nos anos finais do Ensino Fundamental segundo o Censo Escolar realizado em 2018, devido, em casos, as dificuldades dos alunos em compreender os conceitos abordados.

A complexidade dos conteúdos abordados neste nível é mencionada na BNCC: “Ao longo do Ensino Fundamental – Anos Finais os estudantes se deparam com desafios de maior complexidade, sobretudo devido à necessidade de se apropriarem das diferentes lógicas de organização dos conhecimentos relacionados às áreas." (BRASIL, 2017, p. 60). Assim, cabe ao professor atrelar ao ensino metodologias, teorias, ações que possibilitem favorecer a aprendizagem, e consequentemente, garantindo-lhes maiores condições de sucesso escolar.

Nesse sentido, para compor o rol de conceitos abordados neste livro, abordamos no presente capítulo o conteúdo de inequações de primeiro grau com uma variável estudado nos anos finais do Ensino Fundamental, apresentando sugestões de ensino para sala de aula.

UNIDADE TEMÁTICA ÁLGEBRA E O CONTEÚDO DE INEQUAÇÕES

A fim de desenvolver habilidades e competências necessárias ao nível da Educação Básica, A BNCC apresenta cinco Unidades Temáticas que compõem os diferentes campos que a matemática reúne: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.

No tocante à Álgebra, unidade temática do referido conteúdo trabalhado neste capítulo, A BNCC apresenta como finalidade

> [...] o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2017, p. 270).

Nessa perspectiva, estabelecemos um "*link*" dessa citação às inequações, na qual apresentamos ações que são inerentes ao conteúdo, essenciais no processo de aprendizagem. São elas:

- Identificar e diferenciar uma inequação de uma equação;
- Estabelecer leis matemáticas que expressam a relação de desigualdade de valores numéricos;

- Realizar operações dentro do campo das propriedades de uma inequação.

Sobre as inequações, especificamente às de primeiro grau com uma variável à qual estamos estudando, pontua-se como característica principal a desigualdade de valores entre dois membros, na qual cada membro pode assumir diferentes valores de variáveis de ordem 1, ou seja, de primeiro grau. Contudo, levando em consideração que o conceito de inequação (assim como os demais conceitos na matemática) pode assumir diferentes representações, recorremos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica para contribuir no processo de ensino e aprendizagem do conceito de inequação do primeiro grau com uma variável.

TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E O CONTEÚDO DE INEQUAÇÕES

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) é uma teoria voltada a aprendizagem de conceitos matemáticos. Seu criador, Raymond Duval, que é psicólogo de formação, foi pesquisador no Instituto de Pesquisa sobre Ensino de Matemática – IREM, na cidade de Estrasburgo – França, de 1970 à 1995, tendo ocorrido neste último ano a primeira apresentação sistematizada da Teoria, em sua obra intitulada *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels* (DUVAL; FREITAS; REZENDE, 2013).

Segundo Duval (2003), na matemática, ao trabalhar conceitos - diferente de outras ciências em que parte dos conceitos abordados podem ser trabalhados por meio de experiências, esse processo ocorre apenas por meio de representações, ou seja, não é possível ter acesso aos objetos da matemática no mundo real, devido a sua realidade abstrata. Assim, números, funções, equações, razões trigonométricas entre outros, só podem ser estudadas por meio de suas representações.

Tais representações podem estar na forma de símbolos, figuras, gráficos, entre outros tipos, variando conforme objeto matemático estudado. Deste modo, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica enfatiza que a aprendizagem da matemática a nível conceitual, se dá por meio da coordenação e reconhecimento dos objetos matemáticos em suas diferentes representações.

As diferentes representações que um objeto matemático pode assumir estão distribuídas no que Duval (2003) chama de registros. Assim, a partir de quatro grandes registros, há uma variedade de representações que um objeto matemático pode ser representado. Estes registros são:

- Língua Natural: registro na qual define-se por qualquer língua desenvolvida naturalmente pelo sujeito, podendo ser característico de um grupo de pessoas, uma comunidade ou uma língua oficial de um país. Neste registro, suas representações semióticas aparecem comumente na forma de enunciados de problemas.

- Figural: registro que comtempla as diversas formas de representação de figuras planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3); apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumento.

- Simbólico: Registro dos sistemas de escritas, tais como escritas numéricas (binária, decimal, fracionária, ...); Algébricas; Simbólicas (línguas formais); Cálculo.

- Gráfico: neste registro classifica-se os gráficos cartesianos.

Assim, o processo de apreensão conceitual do objeto matemático estudado, se dá no momento que o aluno consegue coordenar espontaneamente ao menos dois registros de representação semiótica. Para isso, dois conceitos essenciais na Teoria são definidos, são eles: tratamento e conversão.

- Tratamento: é definido como toda transformação na representação semiótica do objeto matemático de modo que não altere o seu registro inicial.

- Conversão: é definido como toda transformação que faça com que altere o registro de representação inicial.

No quadro 1 a seguir é apresentado tipos de tratamento e conversão envolvendo o conceito de inequação do 1º grau com uma variável.

Quadro 1 - Exemplos de tratamento e conversão.

Tratamento na representação semiótica em Língua Natural: Paráfrase

Enunciado: Sabendo que Pedro possui o dobro da idade de João, e que a idade de João somada com a de Pedro não é maior que 54 anos. Determine a possível idade de Pedro.

Tratamento no enunciado: Sabe-se que a idade de Pedro é igual duas vezes a idade de João, e que a idade de Pedro mais a idade de João deve ser menor/igual a 54 anos. Determine a possível idade de Pedro.

Tratamento na representação semiótica no registro simbólico: Cálculo

Inequação algébrica: $4x-32> 5x-12$

Tratamento na inequação: $x<-20$

Conversão do registro de representação Língua Natural para Simbólico

Enunciado em Língua Natural: Sabendo que Pedro possui o dobro da idade de João, e que a idade de João somada com a de Pedro não é maior que 54 anos. Determine a possível idade de Pedro.

Conversão para registro simbólico: $P=2J$ *tal que* $P+J \leq 54$

Conversão do registro de representação Simbólico para Língua Natural

Expressão algébrica: Determine o valor de P, dado a expressão: $P=2J$ *tal que* $P+J \leq 54$

Registro em Língua Natural: Como P equivale a duas vezes o J, e P mais J deve ser necessariamente menor/igual a 54, então temos que três J é menor/igual a 54. Assim, J deve ser igual a 18. Consequentemente, P deve ser igual a 36.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Referente ao tratamento, observe no Quadro 1 que as transformações realizadas não alteraram o registro no qual o objeto matemático é representado. No primeiro exemplo, foram realizadas transformações na representação de modo que não alteraram as condições de solução do problema, ou seja, realizou-se uma paráfrase no texto de modo a deixá-lo menos complexo, dando enfoque para seu sentido. Este tipo de transformação ajuda no processo de compreensão do conceito abordado, dos elementos que devem ser considerados na resolução do problema bem como para realizar a conversão corretamente para um outro registro de representação semiótica.

Ainda referente ao tratamento, no segundo exemplo apresentado no Quadro 1, o cálculo algébrico é um tipo de tratamento, visto que as transformações realizadas na representação não alteraram o registro. Vemos que este tipo de tratamento é fundamental no processo de resolução para determinar a solução de um problema envolvendo o conceito de inequação, uma vez que, na maioria dos exercícios e problemas de inequação, sua representação algébrica inicial é dotada de valores numéricos e variáveis, necessitando de um tratamento para chegar ao valor da variável.

Para os exemplos de conversão de registros de representação, apresentamos tanto do registro Língua Natural para o registro Simbólico, como a volta dessa conversão, ou seja, do registro Simbólico para o registro Língua Natural.

Referente ao primeiro tipo de conversão, é notável a mudança do registro de abordagem do conceito de inequação. Inicialmente ele vem enunciado sob a forma de um problema matemático, mas que, após extrair seus dados de acordo com os critérios estabelecidos, utilizando-se da linguagem matemática por meio de símbolos, temos o conceito de inequação agora em sua representação algébrica.

Por outro lado, no segundo tipo de conversão, temos uma descrição em língua natural (língua portuguesa) detalhada da expressão matemática fornecida. Dessa forma, realizamos uma mudança do registro Simbólico para o registro Língua Natural.

Estes exemplos de tratamentos e conversões envolveram apenas os registros Simbólico e Língua Natural e o conceito de inequação, entretanto, diversas outras conversões e tratamentos poderiam ser exemplificadas assim como outros conceitos abordados.

Além dos conceitos de tratamento e conversão, conceitos estes fundamentais para apreensão conceitual do objeto matemático estudado, Duval (2009) fala sobre o fenômeno da não-congruência entre as representações de um mesmo objeto. No processo de conversão, nem toda transformação de registro terá a mesma complexidade entre suas diferentes formas, variando conforme o grau de não-congruência. Assim, três condições/critérios devem ser preenchidos nesse processo para que a conversão seja congruente:

- Correspondência semântica: nesta condição, cada unidade significante presente em uma representação deve ter correspondência semântica com as unidades significantes da outra representação;

- Univocidade semântica terminal: nesta condição, a conversão de uma unidade significante presente no registro de partida deverá resultar em apenas uma unidade significante no registro de chegada;

- Ordem das unidades significantes: nesta condição, a apreensão das unidades significantes, tanto do registro de partida como do registro de chegada, deve estar na mesma ordem.

Diante desses critérios, Duval afirma que:

> [...] quando um desses três critérios não é verificado, as representações não são mais congruentes entre elas, e a passagem de uma à outra não tem mais nada de imediato. Pode igualmente fazer-se que duas representações sejam congruentes em um sentido de conversão e não-congruentes para a conversão inversa. Por exemplo, a expressão "e a representação cartesiana dos dois quadrantes determinados respectivamente pelos semi-eixos Y e X positivos, e negativos, são congruentes se passamos da escritura algébrica ao gráfico, mas não são para a passagem inversa (DUVAL, 2009, p. 18-19).

Assim, toda tarefa na qual a conversão é congruente, os níveis de acertos tendem a ter alta taxa de sucesso. Por outro lado, toda tarefa na qual a conversão deixa de ser congruente, há uma maior taxa de fracasso nas conversões, variando conforme o grau de não-congruência (DUVAL, 2009).

Saber articular essas condições de congruência pode ser uma ferramenta poderosa no processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, visto que, tais condições determinam a complexidade da conversão e, consequentemente, o sucesso da atividade matemática.

INEQUAÇÕES: UNIDADES SIGNIFICANTES

O que define os casos de congruência semântica no processo de conversão são as unidades significantes como apresentado anteriormente, assim, sua ordem, correspondência e univocidade podem interferir na compreensão do objeto matemático estudado, que por sua vez, possui suas unidades significantes específicas, assim como pode possuir unidades significantes comum à outros objetos da matemática.

Para exemplificar o que são essas unidades significantes, observe o problema a seguir:

> ***Problema contextualizado:*** *O Centro Esportivo Francisco Bueno Neto, popularmente conhecido como Chico Neto, é um dos principais ginásios de Maringá, com capacidade para aproximadamente 6000 espectadores. Em uma determinada partida de Futsal,*

sabe-se que o número de adolescentes foi de 2640 e que o número de adultos foi igual ao dobro de idosos. Com base nessas informações, e considerando a capacidade máxima de 6000 pessoas, encontre o possível número de idosos espectadores desta partida (Considere faixas etárias diferentes para cada categoria) (TRAVASSOS, 2018, p. 72).

Para converter este problema em linguagem matemática na representação algébrica, uma das formas é primeiramente extrair os dados numéricos, neste caso, "Adolescentes = A = 2640", "capacidade máxima do estádio = C = 6000 pessoas" e as variáveis "Idosos = x" e "Adultos = 2x". A partir disso, monta-se a expressão que satisfaça as condições de solução estabelecidas no enunciado do problema. É aqui que se identifica o conceito de inequação.

Observe que a passagem textual "considerando a capacidade máxima de 6000 pessoas" é uma condicionante do problema, assim, o número de pessoas (adolescentes + adultos + idosos) não deve exceder a capacidade máxima do estádio. O termo "máximo" é uma unidade significante, presente no campo semântico do conceito, uma vez que "máximo" pode ser interpretado como "menor ou igual à", logo, a conversão do problema para a representação algébrica e seu tratamento ficará da seguinte forma:

Conversão para a representação algébrica:

$$A + x + 2x \leq C$$

Tratamento na representação algébrica:

$$2640 + x + 2x \leq 6000$$

$$x + 2x \leq 6000 - 2640$$

$$3x \leq 3360$$

$$x \leq 1120$$

Observe que a identificação da unidade significante que representa a desigualdade de valores, é fundamental para trabalhar com o conceito de inequação de maneira correta. Além, da unidade significante *máxima* presente no problema, as palavras *adolescentes, adultos, idosos,* e os números *2640* e *6000* são também unidades significantes no processo de conversão do problema. A diferença entre essas e a palavra *máxima,* é que é esta última quem indica de forma implícita que se trata de um problema envolvendo uma inequação.

E se ao invés da palavra *máxima,* substituirmos ela por *menor ou igual à*? Neste caso, o processo de abstração dessa informação pelo aluno certamente o condicionará à uma conversão correta do sinal de desigualdade, uma vez que *menor ou igual à* faz referência direta ao sinal algébrico

Além da palavra *máxima*, outras palavras podem vir a aparecerem em enunciados de problemas envolvendo o conceito de inequação e que também representam uma desigualdade de valores, são elas: *inferior, superior, limite inferior; limite superior; a partir; mínimo; exceder; ultrapassar; superar; vencer, rentável, lucro, prejuízo, recorde, etc.,* variando conforme o contexto do problema.

INEQUAÇÕES: EXEMPLIFICANDO OS CASOS DE CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

Além do reconhecimento das unidades significantes que representam os sinais de desigualdades, os três critérios de congruência semântica são elementos essenciais no que tange a aprendizagem de inequações.

Segundo Duval 2009,

> [...] Esses três critérios permitem determinar a congruência entre duas representações semioticamente diferentes e representando, ao menos, parcialmente o mesmo conteúdo. Duas representações são congruentes quando há correspondência semântica entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações. Naturalmente, pode não haver correspondência para nenhum desses três critérios, para dois ou somente para um. A não-congruência entre duas representações pode então ser maior ou menor. A dificuldade da conversão de uma representação depende do grau de não-congruência entre a representação de partida e a representação de chegada (DUVAL, 2009, p. 69).

Nas figuras a seguir, apresentamos detalhadamente o que cada condição implica na conversão das representações em Língua Natural para a Algébrica, envolvendo inequações.

Figura 1 - Correspondência semântica não satisfeita.

$$\underbrace{\textbf{x}}_{A}\ \textbf{tem como}\ \underbrace{\textbf{limitante inferior}}_{B}\ \textbf{o número}\ \underbrace{\textbf{15}}_{C}$$

$$\underbrace{x}_{A}\ \underbrace{\geq}_{B}\ \underbrace{15}_{C}$$

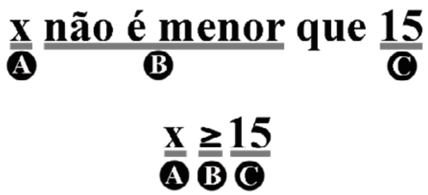
Fonte: Adaptado de Travassos (2018, p. 69).

No exemplo da figura 1, apresentamos na parte superior a representação de uma inequação em Língua Natural. Abaixo, sua conversão para a representação Algébrica. Nesta conversão, marcamos com as letras A, B e C as unidades significantes que compõe as representações, assim, cada unidade significante presente no registro de partida (Língua Natural) deve apresentar correspondência com as unidades significantes no registro de chegada (Algébrico).

Neste caso apresentado na figura 1, as unidades significantes A e C possuem correspondência, (haja vista que são iguais), no entanto, a unidade significante B (limitante inferior) não possui correspondência semântica com o sinal de ≥, uma vez que não apresenta similitude com o mesmo, e que dessa forma, torna o processo de conversão mais complexo.

Na figura 2 apresentamos um exemplo de conversão envolvendo a condição de univocidade semântica terminal.

Figura 2 - Univocidade semântica terminal não satisfeita.



Fonte: Adaptado de Travassos (2018, p. 69).

Assim como o exemplo apresentado anteriormente, as unidades significantes A e C, presentes no registro de partida, apresentam univocidade com as unidades significantes A e C presentes no registro de chegada. Entretanto, a unidade significante B (não é menor) não apresenta univocidade semântica, uma vez que *não é menor* implica em duas unidades significantes, ou seja, *maior* ou *igual,* podendo vir a confundir facilmente o aluno no processo de conversão entre as representações.

Na figura 3 apresentamos um exemplo na qual não é satisfeita a ordem de apreensão das unidades significantes.

Figura 3 - Ordem de apreensão das unidades significantes não satisfeita.

$$\underbrace{15}_{C}\ \text{é o}\ \underbrace{\text{menor valor}}_{B}\ \text{que}\ \underbrace{x}_{A}\ \text{pode assumir}$$

$$\underbrace{x}_{A}\ \underbrace{\geq}_{B}\ \underbrace{15}_{C}$$

Fonte: Adaptado de Travassos (2018, p. 69).

Neste exemplo referente a terceira condição de congruência semântica aqui apresentada, nota-se a divergência entre a ordem das unidades significantes presentes no registro de partida e registro de chegada. Enquanto no registro de chegada temos uma inequação do tipo $x \geq 15$, na representação em Língua Natural, se extrairmos as unidades significantes em sua ordem de apreensão, teremos *15*, *menor valor* e *x*, divergindo da maneira habitual de expressar a representação algébrica de uma inequação, que é apresentar o valor da variável em ralação à algum número, e não o contrário.

Por fim, na figura 4, apresentamos um exemplo de conversão congruente, ou seja, todas as três condições são satisfeitas na passagem de um registro de representação para outro.

Figura 4 - Conversão congruente da representação em Língua Natural para a representação Algébrica.

$$\underbrace{x}_{A}\ \text{é}\ \underbrace{\text{maior/igual}}_{B}\ \text{a}\ \underbrace{15}_{C}$$

$$\underbrace{x}_{A}\ \underbrace{\geq}_{B}\ \underbrace{15}_{C}$$

Fonte: Adaptado de Travassos (2018, p. 69).

Segundo Duval, "toda tarefa na qual a conversão das representações é congruente dá lugar a uma taxa elevada de sucesso. Toda tarefa na qual a conversão não é congruente dá lugar a uma taxa mais ou menos fraca de sucesso, conforme o grau de não-congruência." (2009, p. 19). Deste modo, saber articular as condições de congruência semântica nos exercícios e problemas de inequações pode favorecer a aprendizagem do aluno na aprendizagem do conceito.

PROPOSTA DE ENSINO DE INEQUAÇÕES

Na BNCC de Matemática do Ensino Fundamental, um dos objetivos da Unidade Temática Álgebra é o desenvolvimento do pensamento algébrico no que se refere às técnicas voltadas à resolução de inequações, e enfatiza: "Devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos" (BRASIL, 2017, p. 270). Ou seja, a aprendizagem deve extrapolar o domínio da matemática formal, de modo a utilizar esse conhecimento para resolver problemas/situações-problemas. Assim, essa proposta de ensino visa articular elementos fundamentais para aprendizagem do conceito de inequações em suas diferentes faces, presentes em enunciados de exercícios e problemas.

No processo de aprendizagem do conceito de inequação, elencamos anteriormente três itens, dos quais consideramos pertinentes, que são: *identificar e diferenciar uma inequação de uma equação*; *estabelecer leis matemáticas que expressam a relação de desigualdade de valores numéricos*; *realizar operações dentro do campo das propriedades de uma inequação*. Estes itens, sob a ótica da TRRS, consiste: na conversão e tratamento de registros de representação semiótica, partindo do reconhecimento de unidades significantes que indicam se tratar do conceito de inequação; da conversão para a linguagem matemática por meio de uma relação de desigualdade de valores; e por fim, o tratamento na representação final para determinar o valor da variável.

Assim, essa proposta de ensino por meio dos aspectos supracitados busca propiciar ao professor condições para que exerça um ensino que possibilite a aprendizagem significativa a nível conceitual do objeto matemático inequação. Para tanto, organizamos a proposta para ser desenvolvida com alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental que já receberam um ensino sobre equações e que já iniciaram a aprendizagem de inequações. Entendemos ser necessário o conhecimento e manejo por parte dos alunos envolvendo conteúdos anteriores, tal como equação, visto que estamos prosseguindo ao desenvolvimento do conceito de inequações.

Segunda a BNCC (2017):

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade

> de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. (BRASIL, 2017, p. 270-271).

Entretanto, a BNCC não especifica sobre o conteúdo de inequações, sendo apresentado de modo geral para conceitos algébricos, deixando, assim, transparecer, de forma inadequada, que saber operar com inequações é, sobretudo, saber operar com equações. Deste modo, é necessário trabalhar com o conceito de inequações após ter definido o conceito de equação, devido à similaridade dos procedimentos matemáticos necessários à sua resolução. Tal indicação não é mencionada na BNCC, mas pode ser encontrada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), documento este vigente em todo território brasileiro até o ano de 2016 substituído com o novo documento – BNCC.

Nos PCN, o seguinte trecho é mencionado:

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL, 1998, p. 50-51).

A fim de propiciar o desenvolvimento da compreensão dos alunos sobre as funções da álgebra, elaboramos uma sequência de atividades considerando que os alunos já tiveram contato com o conteúdo de inequações em um primeiro momento, e que, assim, essa sequência de atividades busca avançar para a aprendizagem de inequações no que se refere a compreensão e resolução de problemas matemáticos em Língua Natural.

No Quadro 2 a seguir, apresentamos oito questões de inequação (geralmente entendidas e utilizadas como exercícios), elaboradas por Travassos (2018) e adaptadas para este trabalho. Essas questões foram elaboradas com base nas três condições de congruência semântica de modo a elevar-se o nível de complexidade na medida em que o aluno vai resolvendo-as. Assim, pode-se trabalhar com níveis de complexidade de conversões que vão do congruente ao não-congruente, de forma gradual, familiarizando o aluno com os processos de resolução de uma inequação em dois tipos de registros:

Língua Natural e Simbólico - Algébrico.

Quadro 2 – Questões envolvendo congruência semântica.

1) Determine x sabendo que seu valor somado com 2 vezes o seu próprio valor é maior que 27. **Conversão para o registro algébrico:** $x + 2x > 27$
2) Pensei em um número x, em seguida multipliquei-o por -3, cujo valor ficou maior que 15. Qual possível número pensei inicialmente? **Conversão para o registro algébrico:** $x \times (-3) > 15$
3) Um número inteiro x somado com seu dobro não é menor que 36. Represente algebricamente o enunciado, em seguida, resolva utilizando os procedimentos necessários. **Conversão para o registro algébrico:** $x + 2x \geq 36$
4) Não é igual, nem maior que 12 a soma entre x e seu triplo. Escreva a expressão em sua forma algébrica, em seguida, determine o valor de x. **Conversão para o registro algébrico:** $x - 3x < 12$
5) É no mínimo 17 a soma entre um número par e seu sucessor. Quais valores esse número pode assumir de modo que essa relação seja satisfeita? **Conversão para o registro algébrico:** $2x + (2x + 1) \geq 17$
6) Determine x de modo que ao realizar a diferença com seu dobro resulte em um número não negativo. **Conversão para o registro algébrico:** $2x + (2x+1) \geq 17$
7) Sabe-se que o valor máximo que x pode assumir é igual o produto entre 3 e seu dobro. Determine x. **Conversão para o registro algébrico:** $x \leq 3 \times 6$
8) Sabe-se que o limite inferior dos valores que um número x somado com 8 pode assumir é igual a diferença de dois números iguais. Determine x. **Conversão para o registro algébrico:** $x + 8 \geq y - y$

Fonte: Adaptado de Travassos (2018, p. 79-82).

Tendo em vista que o aluno já tenha conhecimento do que seja inequação e saiba operar em sua forma algébrica, elencamos IV momentos para trabalhar com esta sequência de atividades, cujas orientações para cada momento são detalhadas a seguir.

MOMENTO I

Para o momento I, consideramos pertinente trabalhar com a resolução das equações 1 e 2 com os alunos distribuídos em duplas. Nas questões 1 e 2, as conversões entre os registros em Língua Natural e Simbólico – Algébrico são congruentes, pois apresentam correspondência semântica, univocidade semântica terminal e mesma ordem de apreensão das unidades significantes que a compõe.

Ao iniciar a aula, o professor pode apresentar aos alunos as duas questões na lousa e pedir para formarem duplas para resolverem-nas. Questões desse tipo são favoráveis a serem as primeiras questões para trabalhar a conversão para a representação algébrica devido ao seu baixo nível de complexidade para realizar a transformação em linguagem matemática. É uma maneira do aluno habituar-se com o modo de montar a expressão assim como entender a relação de desigualdade de valores que há.

Tendo ciência do significado das palavras, espera-se que nessas atividades os alunos apresentem êxito no processo de conversão, visto se tratar de questões congruentes. Contudo, dúvidas podem surgir, tais como: *como é o sinal de maior? Como é o sinal de menor? Como é o sinal de maior/igual? Como é o sinal de menor/igual.* Assim, após dar um tempo para resolução das atividades, sugere-se que o professor resolva-as na lousa apresentando as unidades significantes presentes no enunciado explicando sua relação com a representação algébrica. Neste momento, também é viável fazer uma recapitulação das propriedades de operações de inequações ao ir realizando o tratamento nas inequações.

MOMENTO II

No momento II, após a resolução e explicação das questões 1 e 2 feitas pelo professor na lousa, passa-se as questões 3 e 4, orientando os alunos para identificarem as informações que saltam aos olhos (unidades significantes) para assim montar uma expressão algébrica para ser resolvida algebricamente.

Nas questões 3 e 4, as conversões já não são mais congruentes, visto que a questão 3 não satisfaz o critério de *univocidade semântica terminal,* haja vista que a unidade significante *não é menor* é passível de ser interpretada matematicamente como *igual*, *maior* ou *maior/igual*. Já a questão 4 não satisfaz o critério de *ordem das unidades significantes* pois a primeira unidade significante no registro Língua Natural faz referência ao sinal de desigualdade na representação algébrica.

Assim, sugere-se que após um determinado tempo (suficiente para os alunos tentarem resolver as duas questões) o professor intervenha questionando-os, de maneira coletiva, como resolveram a questão 3, se conseguiram montar a expressão algébrica, se estavam tendo dificuldades em identificar os dados etc. Após ouvir as dúvidas, resolver a questão 3 na lousa, juntamente com os alunos, explicando a conversão de cada unidade significante do registro em Língua Natural para a representação algébrica assim como o tratamento algébrico necessário para solução. Na sequência, orientá-los para como resolver a questão 4, tomando como base a resolução da questão 3 feita na lousa.

Aconselha-se nesse momento caminhar pela sala orientando as duplas sobre os procedimentos corretos a serem feitos para resolução da questão 4, pois algumas dúvidas podem persistir visto que a ordem das unidades significantes não é satisfeita, tornando complexo o processo de montar a expressão algébrica de maneira correta. Após o tempo necessário para resolução desta questão, o professor deve resolvê-la na lousa, dando ênfase na explicação relacionada a ordem das informações contidas no enunciado, que por sua vez, troca-se ao passar para a linguagem matemática (representação algébrica).

MOMENTO III

No momento III, devido ao grau de complexidade das questões, aconselha-se a mudar a dinâmica da sala, sendo agora trabalhado com grupos de quatro alunos, favorecendo as discussões entre os colegas, possibilitando assim um posicionamento crítico de cada indivíduo do grupo no processo de resolução das questões, que neste momento, serão aplicadas as questões 5 e 6.

Nas questões 5 e 6, dois dos critérios de congruência não são satisfeitos em ambas questões. Na questão 5 a ordem das unidades significantes não é satisfeita como observa-se ao identificar a unidade significante *mínimo* ao iniciar a leitura do enunciado, e, a condição de univocidade semântica, pois a palavra *número par* pode ser facilmente interpretada como sendo o número 2, 4, 6..., ou até mesmo um número genérico representado por *x.* Entretanto, é preciso compreender que podemos considerar 2, 4, 6, *x* como sendo um número par, mas não o representar como um número par diante dessa situação.

Já na questão 6, não é satisfeita as condições de correspondência semântica visto que a palavra *resulte* pode ser interpretada como *resultado* que faz parte do campo semântico da palavra *igual,* sendo esta referente ao conceito de equação e não inequação, ou seja, é uma unidade significante matemática que não possui correspondência, podendo vir a confundir o aluno no processo de conversão. Sobretudo, nessa questão também não é satisfeita a condição de univocidade semântica já que a expressão textual *não negativo* faz referência a duas unidades significantes na representação algébrica, que é o sinal de maior/igual (≥) e o número zero (0).

Ao passar as questões na lousa para serem resolvidas pelos grupos, o professor deve realizar algumas orientações a respeito do processo de conversão dos registros, tais como: *ter atenção ao analisar as informações contidas no enunciado, realizar corretamente as operações matemáticas na representação algébrica e verificar se a solução condiz com os critérios estabelecidos no enunciado.*

A resolução destas questões pode demandar um maior tempo para serem resolvidas devido à complexidade de sua conversão. Algumas dúvidas podem surgir, tais como: *Pode ser qualquer número par? O que é um sucessor de um número? O que é valor mínimo?* Neste caso, o professor pode realizar algumas ponderações a respeito dessas dúvidas de modo a não interferir negativamente no processo de aprendizagem, mas apenas colaborar para a construção de um modelo mental dessas unidades significantes quando entendidas em sua forma algébrica, por exemplo:

Pergunta 1: *Pode ser qualquer número par?*

Sugestão de resposta: *Poderia, mas neste caso o enunciado não especifica qual número par deve ser apresentado, assim, podemos representar um número par de maneira genérica. Como representa um número par de maneira genérica?*

Caso, a partir dessa indagação, o aluno represente um número par como sendo apenas *x,* realize uma nova pergunta para ele apresentando uma falha em sua representação, por exemplo: *Mas o que garante que x é par? E se x for 3? 3 é um número ímpar!* Deixe-o refletir a partir disso com o restante do grupo.

Pergunta 2: *O que é um sucessor de um número?*

Sugestão de resposta: *O sucessor de um número é aquele que o sucede, por exemplo, qual o próximo número depois do 10? Qual o próximo número depois do 99? O próximo número que vem em sua contagem é seu sucessor!*

Pergunta 3*: O que é valor mínimo?*

Sugestão de resposta: *Valor mínimo é o menor valor que um conjunto de valores pode assumir, por exemplo, qual a menor quantia de crédito, em reais, que você pode colocar em seu celular? Esta menor quantia é o valor mínimo!*

Para as dúvidas referente a questão 6, podem aparecer algumas das seguintes: *O que é diferença? O que é um número não negativo?*

Nestes casos, temos algumas sugestões de respostas, tais como:

Pergunta 1: *O que é diferença?*

Sugestão de resposta: *Diferença é o valor que sobra quando você faz uma subtração de dois valores, por exemplo: (aqui o professor pode perguntar a altura de dois alunos do grupo e dizer que a diferença de altura de um para outro é x, onde x é o valor correspondente a altura W menos a altura Z).*

Pergunta 2*: O que é um número não negativo?*

Sugestão de resposta: *Indagar o aluno sobre o que é um número positivo, sobre o que é um número negativo e se o zero é positivo ou negativo, por exemplo: O 10 (escrever) é positivo? Se ele é positivo então ele não é negativo, certo? E o -2? E 0? Ir apresentando exemplos que favoreçam a compreensão do que seja um número não negativo.*

Ao final do tempo necessário de resolução das questões pelos grupos, convidar dois alunos, de grupos distintos, para explicarem na lousa como realizaram a conversão para a representação algébrica. Neste momento, alguns erros podem aparecer, como aqueles mencionados anteriormente. Assim, o professor deve explicar para toda a sala o porquê de cada erro, detalhando seus motivos.

MOMENTO IV

No momento IV, a dinâmica da sala continua a mesma do momento III, com a realização das atividades em grupo de quatro alunos. Neste momento, serão aplicadas as questões 7 e 8.

Nas questões 7 e 8, nenhuma das condições de congruência semântica são satisfeitas, tornando-as mais complexas no que se refere a conversão das representações. Na questão 7 o registro em Língua Natural tem como unidade significante inicial a palavra *valor máximo,* que faz referência ao sinal matemático de desigualdade menor/igual ($\leq$), possui em seu enunciado a palavra *igual* que é uma unidade significante do conceito de equação e pode confundir o aluno em sua interpretação, já que não apresenta correspondência com nenhuma unidade significante no registro de chegada (expressão algébrica), pois, a palavra *igual* faz referência ao segundo membro da igualdade; e, a unidade significante *valor máximo* não possui univocidade semântica terminal por conta de admitir triplo significado no processo de conversão, podendo vir a ser convertida matematicamente para *igual, menor que* ou *menor/igual*.

Para a questão 8, a ordem das unidades significantes não é satisfeita visto que a primeira unidade significante no registro em Língua Natural é a palavra *limite inferior* que refere-se ao sinal de *maior/igual* (≥); não é satisfeita a correspondência semântica, haja vista que o enunciado possui a palavra *igual* assim como a questão 7, e, não satisfaz o critério de univocidade semântica terminal pois a unidade significante *limite inferior* pode ter significado de *maior, igual, maior/igual* ou até mesmo ser confundido com *valor mínimo*, que por sua vez apresenta outras representações em linguagem matemática.

Ao passar as questões 7 e 8 na lousa, o professor deve orientar os alunos sobre os procedimentos necessários às resoluções das questões, assim como apresentados no momento III. Essas duas questões são consideradas, teoricamente, as mais complexas devido a serem não-congruentes. Deste modo, elencamos possíveis dúvidas e sugestões de respostas das questões 7 e 8, respectivamente.

Para questão 7, algumas possíveis dúvidas que surgirão durante a resolução da questão pelos grupos são:

Pergunta 1: *O que é valor máximo?*

Sugestão de Resposta: *Valor máximo é o maior valor que determinada variável pode assumir. Por exemplo, em uma prova valendo 100 pontos, qual o valor máximo que você pode tirar nessa prova? 100! Pois, esta nota é a maior possível.*

Pergunta 2: *O que é produto entre 3 e seu dobro?*

Sugestão de Resposta: *Produto é o resultado de uma multiplicação. Neste caso, o produto (resultado) refere-se a multiplicação de 3 e seu dobro.*

Pergunta 3: *O que é que "x pode assumir"?*

Sugestão de Resposta: *Nesse caso, está se referindo ao valor numérico que x pode ser.*

Para a questão 8, algumas possíveis dúvidas que surgirão durante a resolução da questão pelos grupos são:

Pergunta 1: *O que é limite inferior?*

Sugestão de resposta: *Limite inferior é o menor valor que pode ter em um conjunto de exemplo, referente as notas da disciplina de matemática, qual o limite inferior para passar de ano escolar? Ou seja, qual o menor valor? Este é o limite mínimo, o limite inferior!*

Pergunta 2: *Como assim "diferença de dois números iguais"?*

Sugestão de resposta: *Como vimos na questão 6, a diferença é o resto que sobra de uma subtração de valores. Assim, dado dois números iguais, qual a diferença dessa subtração?*

O professor deve sempre lembrar que o objetivo dessas intervenções nunca é dar a resposta, mas fazer com o que o aluno reflita sobre a dúvida, e, para isso, o professor deve utilizar de exemplos recorrendo a uma linguagem mais acessível ao aluno.

Após um tempo, o professor pode convidar mais dois alunos de grupos distintos (ou até mesmo um aluno de cada grupo) para resolverem a questão 7 na lousa e assim discutirem coletivamente, sobre a resolução que cada grupo chegou. O objetivo é analisar se os alunos realizaram corretamente a conversão dos registros de representação identificando as unidades significantes, assim como o tratamento algébrico na inequação

Dentre as possíveis dúvidas elencadas anteriormente, no momento da resolução na lousa podem surgir erros que os alunos não tomaram como dúvidas. Exemplo: Na questão 7, pode ocorrer de determinados grupos colocarem como conversão algébrica do enunciado a seguinte expressão: $x=3\times6$. Este tipo de erro ocorre devido à má interpretação da unidade significante *valor máximo*, cuja confusão é corroborada por outra unidade significante, o termo *igual* presente no enunciado.

Vemos que o termo *igual* faz referência aos valores que *x* pode assumir, ou seja *igual* refere-se ao segundo membro da desigualdade e não ao sinal que divide os membros da expressão algébrica. Assim, o professor deve explicar tal fato, mostrando que o sinal de igual (=) está incorreto devido a primeira unidade significante – *valor máximo*. Para que *x* tenha valor máximo, *x* deve ser menor ou igual (≤) a um valor, e não apenas igual (=).

A mesma situação pode ocorrer na questão 8, com o diferencial de que, neste caso, os valores de *x* serão maiores ou iguais (≥) à algum valor, e não apenas igual (=).

INEQUAÇÕES: PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS

Além desses exemplos de atividades de inequações supracitadas, pode-se trabalhar problemas contextualizados nesse viés da congruência semântica, alterando as unidades significantes para que o aluno possa reconhecer o objeto matemático estudado e saber operar, mesmo em situações em que as condições de congruência não são satisfeitas.

O processo de elaboração de problemas contextualizados torna-se mais complexo diante de outros fatores como equivalência referencial, linguagem utilizada, extensão do enunciado, número de condições para resolução do problema, etc. Entretanto, no processo de resolução, conhecer desses elementos que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica apresenta, pode colaborar na compreensão e solução da situação.

Apresentamos no quadro 3 a seguir dois exemplos de problemas contextualizados utilizando os casos de congruência semântica, sendo que o segundo problema corresponde às modificações feitas na linguagem do primeiro problema de modo a atender a algumas condições de congruência semântica, e, dessa forma, favorecer o entendimento pelo aluno sobre a conversão das ideias contextuais à linguagem algébrica na forma de inequação.

Quadro 3 – Problema contextualizado e seu tratamento – registro Língua Natural.

Problema contextualizado

1) Devido ao descaso com a educação brasileira e sobretudo, com as reformas impostas pelo governo a fim de cortar gastos, Célio, professor do Magistério, decidiu verificar a seguinte situação: sabe-se que o piso nacional do magistério para o ano de 2017 segundo o MEC é de R$2.298,80 para carga horária de 40 horas semanais. Sabe-se também que em média, o custo de um deputado federal segundo levantamento de dados realizado pelo *Congresso em Foco* fica em média R$168.662,44 mensal. Com base nessas informações, quantos salários integrais de professor do magistério são necessários juntar, no mínimo, para pagar o custo de um deputado no período de um mês?

Tratamento no problema contextualizado

2) Devido ao descaso com a educação brasileira e sobretudo, com as reformas impostas pelo governo a fim de cortar gastos, Célio, professor do Magistério, verificou a relação salarial entre professores e deputados federais, chegando as seguinte informações: salário do professor do magistério - R$2.298,80; custo de um deputado federal durante um mês - R$168.662,44. Sabendo disso, Célio conclui que: são necessários x salários de professores, no mínimo, para pagar o custo de um deputado federal durante um mês. Sabendo disso, determine a quantidade x de salários.

Fonte: Adaptado de Travassos (2018, p. 84).

Observe que no primeiro exemplo há uma maior riqueza nos detalhes de cada informação, apresentando, sobretudo, algumas informações numéricas irrelevantes tais como *2017* e *40 horas semanais*. Além disso, a estrutura no enunciado como um todo permite confundir o aluno devido às relações sintáticas, ou seja, das relações formais que interligam os constituintes da sequência, as unidades significantes estão esparsas no contexto.

Já no segundo exemplo fizemos modificações no enunciado de modo a organizar a disposição das unidades significantes, eliminando frases desnecessárias, deixando-o mais "claro". Referente a conversão, basta converter a parte textual *são necessários x salários de professores, no mínimo, para pagar o custo de um deputado federal durante um mês* para a linguagem matemática, atribuindo os valores salariais correspondentes e realizando a conversão da unidade significante *no mínimo* para maior/igual (≥).

Deste modo, vemos que trabalhar com problemas contextualizados é/pode ser um desafio maior devido à outras variáveis que influenciam no processo de resolução. Contudo, ao trabalhar a sequência de atividades aqui propostas, espera-se desenvolver no aluno um olhar diferenciado sobre as informações essenciais (unidades significantes do conceito de inequação) pertinentes para resolução de um problema contextualizado. Assim, o aluno poderá construir a noção do que trata o problema e construir conhecimento sobre as informações matemáticas relevantes, bastando apenas interpretá-lo de maneira coerente com os critérios de solução estabelecidos no enunciado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esses exemplos de atividades são demonstrativos de como podemos trabalhar as condições de congruência semântica a favor de uma aprendizagem à nível conceitual de inequações do 1º grau com uma variável. Assim, basta aplicar esses conceitos à outras situações matemáticas, enriquecendo o conhecimento do aluno.

No que se refere à resolução das questões da sequência de atividades, é natural apresentar dificuldades no processo de conversão quando uma ou mais condições não são satisfeitas, visto que tais condições influenciam no processo de compreensão de como montar a expressão algébrica. Entretanto, quanto mais o aluno consegue resolver com êxito as questões em seu nível mais complexo, onde não há congruência semântica, há um forte indício da apreensão conceitual por parte do aluno referente ao objeto matemático estudado.

Neste capítulo trabalhamos apenas dois tipos de registros: Língua Natural e Simbólico – Algébrico, enfatizando os casos de congruência semântica na conversão entre os registros. Contudo, outros registros podem ser trabalhados nesse viés, articulando-os com os casos de não-congruência e respaldando seu ensino e aprendizagem com base na TRRS.

Por fim, mas não menos importante, o tratamento na representação é essencial para que o estudante saiba coordenar esses registros, dando-lhe uma visão global do que propunha o problema/solução da situação matemática apresentada. Referente ao conceito de inequação, o tratamento pode ser de grande valia tanto para transformar o enunciado de modo a deixá-lo mais objetivo, assim como é importante para o sucesso na atividade matemática.

Vemos que, referente ao conceito de inequação, não basta o aluno saber realizar as operações elementares de Matemática, tais como adição, subtração, multiplicação e divisão, mas compreender as propriedade de inequação quando representadas em sua forma algébrica, que neste caso, umas das propriedades consiste na alteração do sinal de desigualdade quando multiplicado/divido a inequação por um número negativo.

Assim, espera-se que esse trabalho possa orientar professores e futuros professores ao trabalhar o conteúdo de inequações com seus alunos, na qual é apresentado uma perspectiva de ensino e aprendizagem baseada na complexidade em que as questões são formuladas, organizando-as de maneira que o aluno possa assimilar, gradativamente, os elementos que tornam a compreensão de exercícios e problemas de inequações mais complexos e assim, saber operar em seus diferentes graus de dificuldades.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação Infantil e Ensino Fundamental. 3ª ed. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Ensino Médio. Brasília: MEC, 2018.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: **Aprendizagem em Matemática**. Machado, S. D. A. (org.). pp. 11-33. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond.; FREITAS, José Luiz Magalhães de;REZENDE, Veridiana. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 2, p. 10-34, 2013.

TRAVASSOS, Wilian Barbosa. **Um estudo sobre o conceito de inequação com licenciandos em Matemática:** contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 2018. 183f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá – PR, 2018.

Capítulo 5

UMA PROPOSTA DE TAREFAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA UTILIZANDO O TANGRAM COMO UM REGISTRO FIGURAL

Mariana Moran Valdete dos Santos Coqueiro

INTRODUÇÃO

As ideias geométricas conhecidas há muitos anos e usadas até hoje, influenciaram o desenvolvimento humano. No decorrer da história, estudos envolvendo construções geométricas foram desenvolvidos por importantes pesquisadores, filósofos e matemáticos, e são reconhecidas e utilizadas até os dias de hoje. Euclides, Pitágoras, Tales, Arquimedes, dentre outros, iniciaram seus estudos na Geometria e tais estudos alcançaram, em tempos modernos, altíssimos níveis de complexidade e abstração chegando a refinados métodos de cálculo e álgebras abstratas.

Nesse sentido, o que diz a BNCC (BRASIL, 2017) a respeito do estudo da Geometria? A Geometria deve englobar um estudo de diferentes áreas do conhecimento e auxiliar na resolução de problemas do mundo físico. Habilidades como a visualização e aplicações na busca de soluções de problemas, a compreensão e ampliação da percepção do espaço, as relações entre as representações planas nos desenhos devem ser buscadas na Geometria. Deve desenvolver competências diferentes das específicas dessa unidade, como por exemplo, a aprendizagem de números e medidas identificando diferenças e semelhanças, realizando conexões entre as diferentes áreas da Matemática.

Atualmente, com o objetivo de assegurar as aprendizagens essenciais de cada etapa, a BNCC (BRASIL, 2017) recomenda o estudo de posição e deslocamentos no espaço, as formas e relações entre seus elementos, podem desenvolver o raciocínio geométrico dos alunos. As transformações geométricas, como as simetrias, também estão presentes no estudo da Geometria e indica-se que tal estudo seja realizado por meio da manipulação de representações de figuras no plano e com o uso de *softwares* de Geometria. Nos Anos Iniciais as noções de distância, de referência para localização e deslocamento de objetos, servem de base para compreensão de mapas e outras coisas. Quanto às formas, é fundamental que os alunos dos Anos Iniciais reconheçam figuras bidimensionais e tridimensionais, saibam nomear e comparar polígonos, levando em consideração seus lados, vértices e ângulos. Nos Anos Finais do Ensino Fundamental, os estudos realizados nos anos anteriores devem ser consolidados e ampliados de modo que contribua para o raciocínio hipotético-dedutivo do aluno. É nessa fase que se inicia uma aproximação entre a Álgebra e a Geometria gerando a Geometria analítica. Estuda-se as representações no plano cartesiano decorrendo de conhecimentos de conjuntos numéricos e suas representações na reta numérica.

Por fim, o estudo da Geometria não pode ficar restrito a aplicações de fórmulas de área e volume e nem a aplicações de teoremas, mas deve capacitar intelectualmente o aluno para aprender novos conceitos e resolver situações problemas com as quais este irá se deparar.

Nesse sentido, levando em consideração a não existência física dos objetos matemáticos - em particular, geométricos - e a dificuldade de compreensão, pelos alunos, da Geometria, desperta a necessidade de procurar representações e metodologias para se trabalhar com esse conteúdo sem desconsiderar os aspectos cognitivos do sujeito. Então, a proposta deste texto é abordar as representações de figuras geométricas planas, nomeando e comparando os polígonos, com propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos para os Anos Finais do Ensino Fundamental por meio do Tangram na forma de registro figural Material Manipulável (MM) e Software de Geometria (SG). Serão propostas questões exploratórias de Geometria a serem realizadas durante as construções, de modo a nortear o professor e o aluno em uma discussão sobre cada etapa da construção. Também, propomos tarefas a serem realizadas após as construções como uma forma de aplicação do material produzido.

Tal proposta aguça nos estudantes as habilidades e o reconhecimento de padrões com uma ampla experiência em conceitos importantes da Geometria. Além disso, podem ser acomodadas no currículo de matemática tornando o trabalho com MM e SG mais interessante.

As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.

RECONHECENDO OBJETOS EM GEOMETRIA

A representação do objeto influencia diretamente na compreensão de seu conceito e propriedades, tornando fundamental a escolha do tipo de representação exigida pela situação em que se trabalha. No caso da Geometria na Educação Básica, Duval (1999) explica que a atividade matemática se realiza em dois registros: o das figuras e o da língua natural. O registro das figuras é utilizado para visualizá-las e reconhecer, desse modo, algumas de suas propriedades; e o registro da língua natural enuncia definições, teoremas, hipóteses, descreve os objetos etc.

Os registros de representação semiótica constituem as formas de representar objetos com o propósito de auxiliar na aprendizagem de algum conceito. Para isso, o sujeito trabalha "dentro" de sistemas semióticos que, de acordo com Duval (2009, 2012), cumprem basicamente três atividades cognitivas inerentes a toda representação:

1. *a formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado:* deve respeitar regras de utilização, de identificação, de reconhecimento da representação e a possibilidade de sua utilização para tratamentos; constitui um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis com o fim de identificar *uma representação de alguma coisa* em determinado sistema;
2. *tratamento:* transformar a representação inicial em outra, obedecendo às regras do próprio sistema, o que constitui uma relação de conhecimento; é uma transformação interna ao registro. Um exemplo de tratamento comum, no registro figural, é a transformação de um triângulo em dois triângulos com a mesma área, conforme a Figura 1:

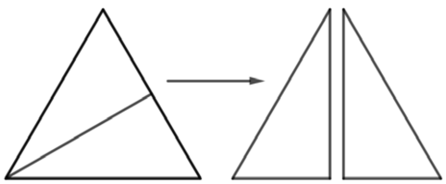


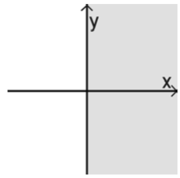
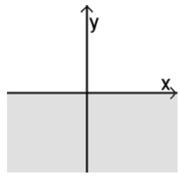
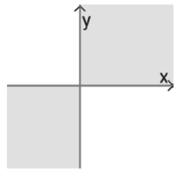
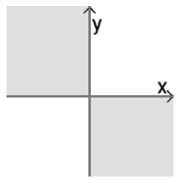
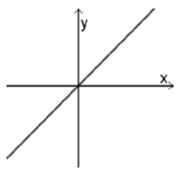
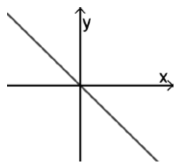
Figura 1 – Transformação de um triângulo em dois triângulos congruentes entre si.

Fonte: As autoras.

3. *a conversão:* converter a representação produzida em um sistema para outro, sem perda de conceitos, de modo a explicar outras significações relativas ao que está sendo

representado. "Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro" (2009, p. 58). São exemplos de conversão, a língua natural (I) para a expressão algébrica (II) e para a representação gráfica cartesiana (III), conforme representado no Quadro 1:

Quadro 1 – Conversão.

I	II	III
1. ... o conjunto de pontos que têm abscissa positiva	x>0	
2. ... que têm ordenada negativa	y<0	
3. ... cujas abscissa e ordenada têm o mesmo sinal	xy>0	
4. ... cujas abcissa e ordenada têm sinais diferentes	xy≤0	
5. ... cuja ordenada é igual à abscissa	y=x	
6. ... cuja ordenada é oposta à abscissa	y=-x	

Fonte: Duval (2012, p. 274).

Como exemplo de um sistema semiótico na Geometria, é possível pensar no registro figural. Este é utilizado para representar determinadas figuras geométricas que podem ser modificadas de acordo com o que a situação exigir dentro do mesmo sistema.

Então, para Duval (2011), os registros são sistemas semióticos, criadores de novos conhecimentos, que satisfazem, basicamente, duas condições:

- produzem representações que permitem acesso e exploração a objetos inacessíveis perceptível ou instrumentalmente;
- permitem transformações em novas representações.

Porém, fazer uma transformação de registro, em Geometria, não consiste simplesmente em mudar de registro, assim como da representação algébrica para a gráfica, no Cálculo: "É necessário que os tratamentos figurais e discursivos se efetuem simultaneamente e de maneira interativa"[33] (DUVAL, 1999, p. 147). Deve haver uma coordenação entre os tratamentos realizados na língua natural e na figura. Duval (1999) afirma que a maioria dos alunos entre o 6º e o 9º ano está longe de adquirir essa coordenação, e as tarefas propostas nesses níveis de ensino não parecem suficientes para favorecer esta aquisição.

Então, pensando em uma aprendizagem fundada sobre a coordenação de registros, é demonstrável, em resultados de trabalhos apresentados por Duval (2012, p. 276), que "a conversão das representações semióticas é a primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática".

Para Duval (2003), os fracassos ou os bloqueios dos alunos, independentes do nível de ensino, têm estreita relação com os monorregistros[34]: "Existe um "enclausuramento" de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes" (DUVAL, 2003, p. 21). Para o pesquisador, esse fato também impede o aluno de utilizar seus conhecimentos prévios e, consequentemente, de adquirir novos conhecimentos.

Nesse capítulo, serão apresentadas propostas de tarefas que utilizam o Tangram na forma de registro figural Material Manipulável (MM) e *Software* de Geometria (SG), de modo a realizar transformações, sendo elas na forma de tratamento e conversão. Essas duas formas de "ver" as figuras são consideradas registros figurais de representação semiótica, ou seja, sistemas semióticos que permitem abstrações cognitivas utilizáveis em explorações e reconhecimentos de propriedades geométricas.

---

33 Utilizou-se a tradução do original para o espanhol feita por Myriam Vega Restrepo: "es necesario que los tratamientos figurales y discursivos se efectuén simultaneamente y de manera interactiva". Todas as traduções da versão utilizada foram realizadas pelas autoras.

34 Monorregistro, para Duval (2003), é a não mobilização simultânea entre registros.

Muitas vezes, em tarefas de Geometria, é solicitado ao aluno que represente ou reproduza determinados objetos geométricos, ou o enunciado do problema é complementado por meio de uma representação figural. Tais representações poderão se referir ao mesmo objeto, porém ser diferentes por conta dos instrumentos que as reproduzem.

Tanto do ponto de vista cognitivo quanto do ponto de vista geométrico, as tarefas podem ser completamente diferentes conforme o tipo de instrumento utilizado na reprodução de uma figura (DUVAL, 2005). De modo geral, as operações a serem realizadas têm relações diretas com o tipo de instrumento que está sendo utilizado. "Os instrumentos que se toma para poder reproduzir uma figura dada direcionam a maneira de olhar"[35] (DUVAL, 2005, p. 14) e, em consequência favorecem em maior ou menor escala o raciocínio geométrico.

A seguir, o Tangram será descrito de modo breve com o objetivo de possibilitar o conhecimento histórico e cultural desse material.

CONHECENDO O TANGRAM

O Tangram é um quebra-cabeça chinês, de origem milenar, composto por sete peças, sendo: 2 triângulos grandes, 1 triângulo médio e 2 triângulos pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo (KALEFF; REI; GARCIA, 1997). Pode-se utilizar como unidade de medida a área do triângulo pequeno para calcular as áreas das demais figuras, por meio da sobreposição. *Tan* refere-se à dinastia Tang, uma das famílias mais duradouras e poderosas da China e *gram* vem do grego *grámma*, que significa desenho, figura matemática (BONJORNO; OLIVARES, 2006).

35 "Les instruments que l'on prend pour pouvoir reproduire une figure donnée commandent la manière de la regarder". Tradução do original feita pelas autoras deste texto.

Figura 2 – Tangram Quadrado Mágico.
Fonte: As autoras.

Como é comum aos mitos e às lendas, tanto oriundos da cultura ocidental quanto da oriental, existem variações na lenda do Tangram. Em uma dessas versões, na China, um jovem, que faria uma longa viagem pelo mundo, foi se despedir de seu mestre. Na ocasião, como presente, o mestre deu-lhe um espelho, em forma quadrada, e solicitou ao discípulo que, com ele, registrasse tudo que visse para lhe mostrar quando voltasse. Extremamente surpreso, o jovem questionou o mestre como poderia, com um simples espelho, registrar tudo que encontrasse no decorrer de sua viagem. Antes que o mestre pudesse responder, o espelho caiu da mão do jovem e se dividiu em sete peças. Foi então que o mestre lhe explicou que ele tinha a possibilidade de construir figuras e retratar, assim, todas as coisas vistas, por meio das sete peças. Dentre estas figuras, podem ser formadas figuras geométricas, animais, pessoas, plantas, objetos, letras e números.

Além deste Tangram, denominado por quadrado mágico, existem outros tipos de quebra-cabeças geométricos planos, também chamados de Tangram, que são originados do recorte de figuras planas, com forma de triângulos, hexágonos, coração, de um ovo, círculos, entre outros, mostrados na Figuras 3, mas que poucas pessoas conhecem por Tangram.

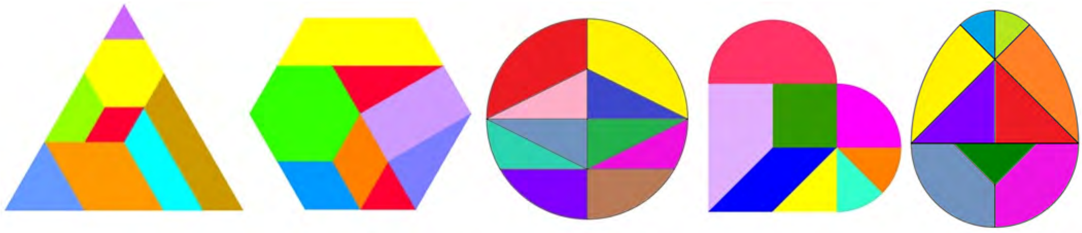


Figura 3 – Outros tipos de Tangram construídos no GeoGebra.

Fonte: As autoras.

Além das sugestões de construções do Tangram que apresentaremos neste capítulo por meio de dobraduras e software de Geometria, pode-se construir o Tangram também sobre uma malha pontilhada (com os pontos dispostos à mesma distância).

Na próxima seção, será realizada uma breve discussão a respeito do uso do Tangram na forma de Material Manipulável e na forma de *Software* de Geometria apresentando suas potencialidades e limitações quando considerados como registros de representações figurais.

REGISTRO FIGURAL NA FORMA DE DOBRADURAS DE TANGRAM

Para esse texto, será sugerida a construção do Tangram com dobraduras e sua exploração por meio de questões e tarefas. Tal material, será compreendido e estudado como um registro na forma figural. Tal consideração leva em conta o fato deste poder ser manuseado e utilizado com fim didático cumprindo duas condições básicas (DUVAL, 2011):

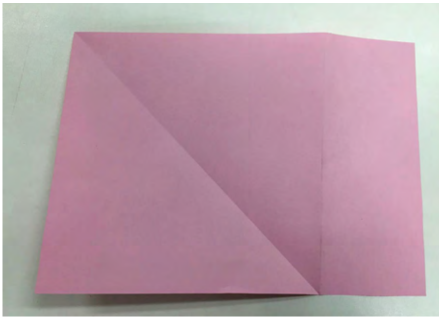
- possibilita a produção de representações que permitem o acesso a objetos perceptiva ou instrumentalmente inacessíveis;
- e proporciona uma rede de operações específicas que permite a transformação de representações produzidas em novas representações.

As experiências que podem ser realizadas com o Tangram se enquadram como uma oportunidade para a exploração de conceitos e propriedades de figuras geométricas quando adequado ao propósito que se destina. Lorenzato (2006) explica que, ao se utilizar qualquer tipo de material, é primordial a atividade mental por parte do aluno, enquanto o professor deve planejar cuidadosamente a passagem do concreto ao abstrato, formalizando o conteúdo. É fundamental, por exemplo, explorar propriedades dos polígonos que compõem o Tangram, tais como medidas de seus ângulos, tipos de figuras poligonais, quantidade de vértices e arestas, medida das áreas etc., de modo a trabalhar com as diversas possibilidades de transformações figurais que o material oferece.

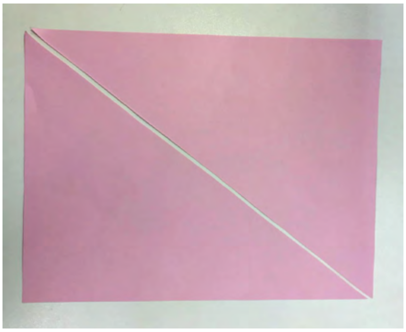
A seguir, tem-se um passo a passo da construção do Tangram utilizando dobraduras, e as figuras apresentadas são imagens de construções feitas pelas autoras:

Material: 1 folha de sulfite, tesoura ou régua.

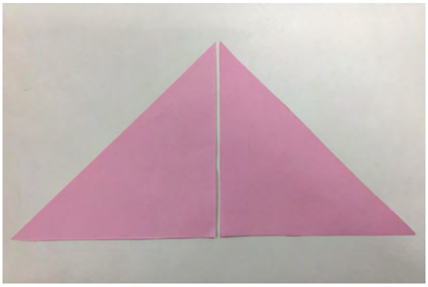
1. Recorte a folha de sulfite de modo a obter um quadrado de maior área possível.



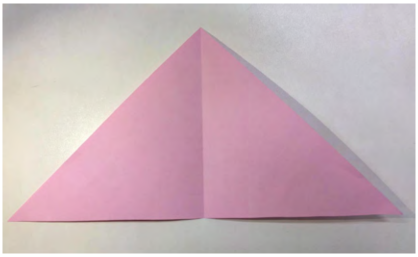
2. Dobre o quadrado em uma de suas diagonais, formando dois triângulos iguais e destacando-os.



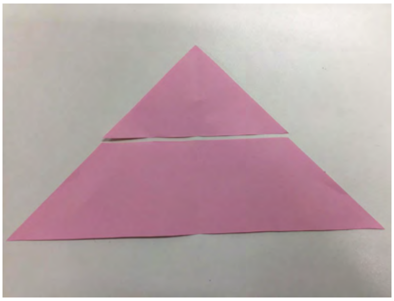
3. Pegue um dos triângulos e dobre novamente ao meio, unindo os vértices da hipotenusa, formando mais dois triângulos iguais e destacando-os. Estes são os dois triângulos grandes do jogo.



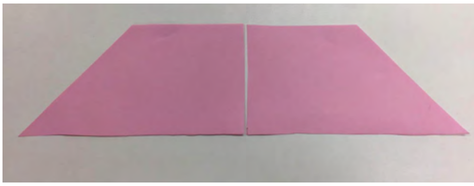
4. Com o outro triângulo que sobrou no item 2, serão feitas as outras cinco peças. Primeiro, marque o ponto médio da hipotenusa unindo os vértices desse lado do triângulo.



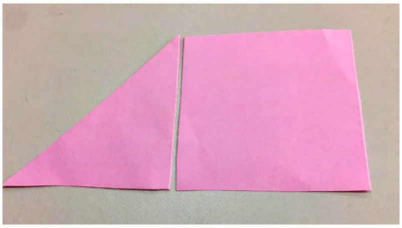
5. Pega-se o vértice do ângulo de 90º e coloca-se sobre o ponto médio marcado na etapa 4 e realiza-se a dobra. Isso delimita o triângulo médio do jogo, que deve ser destacado.



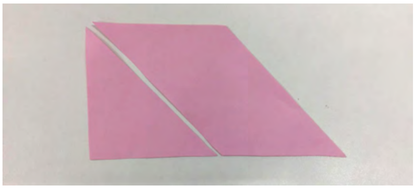
6. O trapézio isósceles obtido na etapa 5, deverá ser dividido da seguinte forma, marque o ponto médio da base maior, e separado em duas partes iguais, formando dois trapézios retângulos.



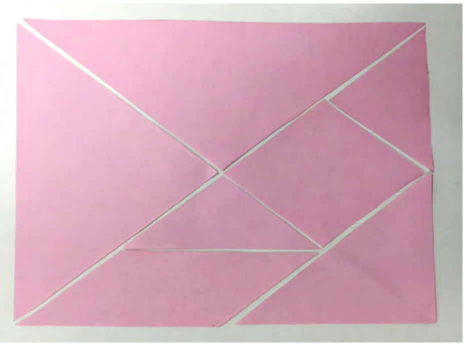
7. Com um deles, serão formados o quadrado e um dos triângulos pequenos. Para isso, deve-se unir os vértices da base maior do trapézio. Faz-se a dobra e destaca-se.



8. Com o outro trapézio retângulo, deve-se unir o vértice do ângulo reto do lado maior com o vértice oposto em diagonal, formando o paralelogramo e o outro triângulo pequeno.



9. Ao reunir todos as peças construídas nos passos anteriores, obtém-se o seguinte:



Ao confeccionar um Tangram utilizando dobradura, é possível explorar diversas propriedades dos polígonos, como por exemplo, vértices, número de lados, medida de seus ângulos, diagonais, ponto médio, entre outros. Lorenzato (2006) explica que os materiais que possibilitam transformações por serem dinâmicos, proporcionam a realização de redescobertas, percepção de propriedades e construção de conhecimento.

Para Lorenzato (2006) os Materiais Manipuláveis favorecem a realização de descobertas e permitem um trabalho menos formal. Eles também possibilitam que os participantes identifiquem os conceitos elementares da matemática e construam várias representações mentais, baseadas nas representações semióticas aparentes, favorecendo a aprendizagem e o reconhecimento dos elementos geométricos. Ou seja, o uso de MM motiva os participantes a pensar, elaborando suas próprias estratégias e ações.

Não se constrói um conhecimento simplesmente tocando, observando ou manipulando objetos. A ação do sujeito e, posteriormente, a abstração sobre o que foi vivenciado, são fundamentais para a construção do conhecimento e um bom aproveitamento do material. “Na disciplina de Matemática, [...], o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p. 23).

Também é possível verificar, mostrar ou chegar a resultados matemáticos por meio dos MM. Porém, estes não substituem as provas matemáticas, servindo somente para ilustrar certos raciocínios e auxiliar na busca de soluções. Tahan (1962) já ressaltava que não basta que o sujeito tenha experiências com os Materiais Manipuláveis: ele precisa raciocinar durante o uso desses.

Porém, Passos (2006, p. 77) observa que,

> Embora tenha ocorrido, por parte de muitos professores, uma compreensão restrita desse método, por entenderem que a simples manipulação de objetos levaria à compreensão, estudos mostraram a existência de estreita relação entre a experimentação e a reflexão.

No entanto, a interação "sujeito – objeto" deve ser mediada pelo professor de modo a indicar ao aluno o caminho a ser percorrido sem, porém, percorrer esse caminho no lugar do aluno.

A seguir, algumas sugestões de questões exploratórias para serem realizadas durante a construção do Tangram por meio de dobraduras de modo a explorar alguns conceitos de Geometria.

Questão 1: Qual o procedimento realizado para obter o quadrado de maior área possível da etapa 1?

Questão 2: Como poderemos classificar estes dois triângulos obtidos na etapa 3 quanto aos lados e ângulos?

Questão 3: Na etapa 5, foram obtidas duas peças, um triângulo e um trapézio. Como poderemos classificar este trapézio? Explique as propriedades deste trapézio.

Questão 4: Na etapa 6, foram obtidos dois trapézios, que característica possui este trapézio?

Questão 5: Nas etapas 7 e 8, foram obtidos dois triângulos, um quadrado e um paralelogramo. Quais características apresentam estes dois triângulos? Quais propriedades caracteriza o quadrado e o paralelogramo, de acordo com o número de lados, número de ângulos, valor de cada ângulo, ângulos opostos, retas paralelas, diagonais, vértice?

Questão 6: Após obterem todas as peças do Tangram, verifique se existem figuras semelhantes. O que caracteriza uma figura semelhante?

Na sequência apresentaremos algumas sugestões de tarefas para serem realizadas a partir da manipulação com as peças do Tangram, fazendo a sobreposição a fim de realizar o cálculo de área das figuras geométricas.

Tarefa 1: Considere como unidade de medida de área, a área do triângulo menor, calcule:

A área do triângulo médio, triângulo grande, quadrado e paralelogramo;

Com duas peças do Tangram forme um quadrado e calcule sua área;

Com três peças do Tangram forme um quadrado e calcule sua área;

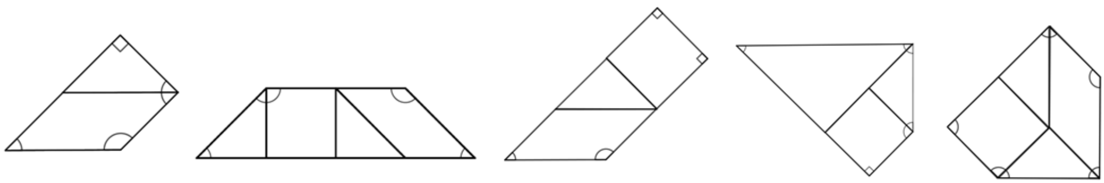
Com quatro peças do Tangram forme um quadrado e calcule sua área;

Com cinco peças do Tangram forme um quadrado e calcule sua área;

Com todas as peças do Tangram forme um quadrado e calcule sua área;

Observação: não é possível formar um quadrado utilizando seis peças do Tangram.

Tarefa 2: Monte as figuras com as peças do Tangram e calcule os ângulos internos de cada uma das figuras geométricas (baseado em Bonjorno; Olivares, 2006):



REGISTRO FIGURAL NA FORMA DE CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

Nesse capítulo será apresentado, também, o Tangram construído por meio do *software* GeoGebra, além de tarefas que sugerem o seu uso de modo a propiciar a construção de ideias geométricas.

Utilizar *softwares* geométricos para o trabalho com figuras confere confiabilidade e objetividade que possibilitam efetuar verificações, observações (DUVAL, 2011). O *software* também possibilita a visualização das representações dos objetos a serem trabalhados.

Do mesmo modo, Borba e Penteado (2001) afirmam que os *Softwares* de Geometria proporcionam, dentre outras coisas, a geração de conjecturas orais e escritas com ênfase na experimentação. O uso de *softwares* também possibilita uma mobilidade, pelo sujeito, de operações com os objetos geométricos. Por exemplo, o “arrastar” de um vértice, a construção de polígonos e poliedros, a visualização de um objeto por várias perspectivas, além de medidas de comprimento e cálculos de área, dentre outras interações.

O fato de *softwares* permitirem o “arrastar” de figuras ou de suas partes sem perda de vínculos e a utilização de um recurso que Gravina (1996) denominou de “régua e compasso eletrônicos” que preserva as relações geométricas, é o que diferencia o desenhar ou construir figuras de outros registros. Além disso, os *softwares* possibilitam manipular e conjecturar em matemática.

Duval (2011) expõe sua concepção a respeito do uso dos *softwares* computacionais nas aulas de matemática, chegando a afirmar que o monitor e o teclado vieram para substituir o papel, a caneta e o quadro negro. Baseado nesse raciocínio, o pesquisador explana as contribuições do computador para o desenvolvimento da atividade cognitiva no sujeito em formação:

> Os computadores não constituem um novo registro de representação. E isso por uma razão simples: *as representações que eles exibem são as mesmas que aquelas produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual*. [...] No entanto, *eles constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos*. Eles exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual. Obtemos, imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter à mão livre após, talvez, vários dias de escritas e cálculos ou construção de figuras (DUVAL, 2011, p. 137).

O uso do computador também requer do sujeito a elaboração e execução de tarefas cognitivas por meio da interação com seu *menu* de comandos, e suas ações estão interligadas entre o problema a ser resolvido, os comandos disponíveis pelo *software* e a atividade cognitiva necessária para a resolução da tarefa. Desse ponto de vista, a tarefa a ser executada nesse ambiente pode ser mais complexa pelo maior número de variáveis envolvidas no processo de resolução.

Para a construção do Tangram e a elaboração das tarefas desse capítulo, foi utilizado o *software* GeoGebra. A escolha por esse *software* se dá pelo fato de ser um *software* livre que possibilita criações geométricas sem perder o raciocínio necessário para se realizar uma construção geométrica. Ou seja, para realizar algo no GeoGebra é necessário que o atuante tenha conhecimentos de construção geométrica, já que o *software* não apresenta as figuras prontas essas devem ser construídas pelo sujeito.

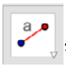
O GeoGebra é um *software* gratuito, que abrange conceitos de Geometria, álgebra, cálculo e estatística. Ele foi desenvolvido inicialmente pelo austríaco Markus

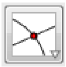
Hohenwarter, e colocado na rede internacional de computadores no ano de 2002. Com esse *software*, é possível construir os elementos básicos de Geometria, além de figuras, gráficos de funções; fazer cálculo de áreas, de seções cônicas que podem ser modificadas dinamicamente, dentre outras funções, todas envolvendo Estatística, Cálculo, Geometria e Álgebra.

O *software* GeoGebra possibilita a visualização de várias janelas simultâneas, de acordo com a necessidade, de modo a viabilizar o andamento do trabalho desejado. É possível ter à disposição janelas de álgebra, de Geometria, de ferramentas e de comandos ao mesmo tempo. Outra vantagem é a realização de construções e operações e a facilidade em apagá-las ou salvá-las, quantas vezes for necessário, até a chegada de conclusões novas e da solução do problema: "Uma das vantagens do uso do GeoGebra é que suas construções são dinâmicas [...]. Isso permite que o sujeito faça grande quantidade de experimentações que lhe possibilite construir proposições geométricas" (GERÔNIMO; BARROS; FRANCO, 2010, p. 11).

Apresentamos uma sugestão para a construção do Tangram no *software* GeoGebra, podendo ser realizada de outras formas:

1. Abra a janela no GeoGebra, a seguir esconda os eixos e a malha quadriculada, caso estejam visíveis, clicando com o botão direito do mouse e selecionando a opção exibir eixos e malha;

2. Primeiro vamos construir o quadrado que será a base para encaixar as peças do Tangram. Selecione a ferramenta *Segmento com Comprimento Fixo* , clique na janela de visualização e em *Comprimento* escolha o comprimento de sua preferência, será criado o segmento de reta rotulado automaticamente por f. Selecione a ferramenta *Reta Perpendicular*  e faça uma reta perpendicular no ponto A e no ponto B;

3. Selecione a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*  para criar dois círculos, primeiro clique no ponto A para definir o centro e posteriormente no ponto B para definir o raio. Repita esse processo com o centro em B. Na sequência, com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*  faça a interseção dos círculos com as retas,

clicando nas duas interseções superiores;

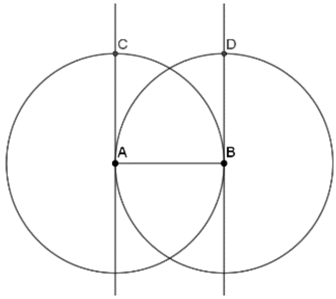
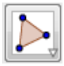


Figura 4 – Construção do quadrado .

Fonte: As autoras

4. Com a ferramenta *Polígono*  clique sobre os pontos A,B,D,C e , obtendo o quadrado ABDC. Na janela de álgebra, desative a visualização das retas perpendiculares e das circunferências.

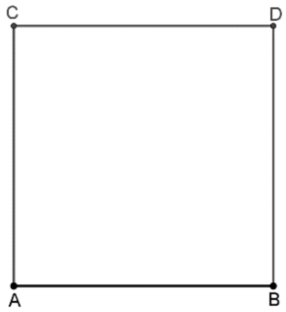


Figura 5 – Quadrado .

Fonte: As autoras.

5. Selecione a ferramenta *Segmento*  e construa a diagonal AD do quadrado ABDC;

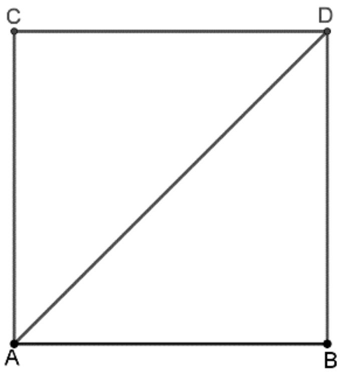
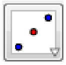


Figura 6 – Diagonal do Quadrado .

Fonte: As autoras.

6. Utilizando a ferramenta *Ponto Médio*  encontre os pontos médios dos lados AB e BD e da diagonal AD, obtendo os pontos E,F e G respectivamente. Utilizando a mesma ferramenta, encontre os pontos médios entre os segmentos AG e GD e entre os dois pontos B e , G obtendo os pontos H,I e J;

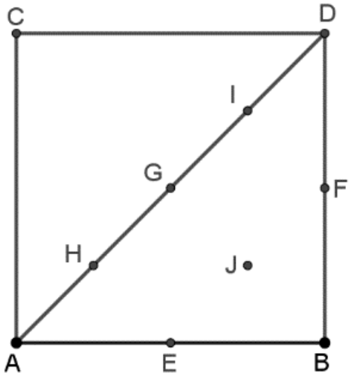
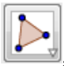


Figura 7 – Pontos Médios.

Fonte: As autoras

7. Utilizando a ferramenta *Polígono* , clique sobre os pontos A,C,G,A e C,D,G,C, obtendo os dois triângulos maiores. Clique sobre os pontos B,E,F,B, obtendo o triângulo médio. Clique sobre os pontos D,F,I,D e G,H,J,G, obtendo os triângulos pequenos. Com a mesma ferramenta, clique sobre os pontos F,J,G,I e F, obtendo o quadrado. E por último clique sobre os pontos A,H,J,E e A, obtendo o paralelogramo. Na janela de álgebra, desative a visualização de todos os pontos.

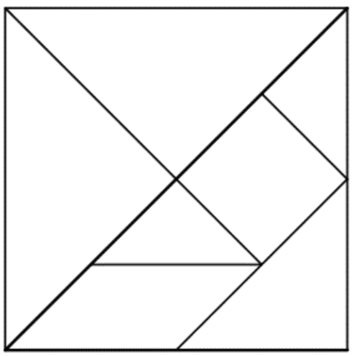
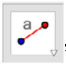


Figura 8 – Tangram.

Fonte: As autoras

Na sequência, apresentaremos a construção das peças do Tangram de forma que os alunos possam manipulá-las. Estas peças poderão ser transladadas e rotacionadas para que sejam formadas figuras geométricas, representações de objetos e outros.

8. Para construir os triângulos retângulos grandes, selecione a ferramenta *Segmento com Comprimento Fixo* , clique na janela de visualização e em *Comprimento* digite a medida do lado do quadrado base (f);
9. Selecione a ferramenta *Mediatriz*  e clique nos dois pontos K e L ou no segmento. Escolha a ferramenta *Semicírculo*  e clique nos pontos K e L. Na sequência, com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*  faça a interseção do semicírculo com a reta mediatriz;

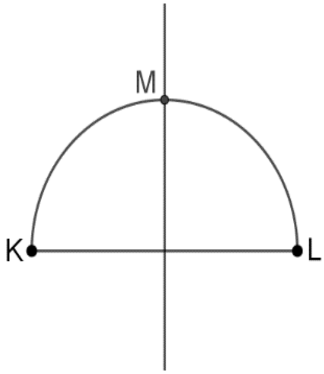
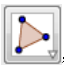


Figura 9 – Construção do triângulo grande .

Fonte: As autoras

10. Utilizando a ferramenta *Polígono* , clique sobre os pontos K,L,M,K, obtendo o triângulo KLM. Na janela de álgebra, desative a visualização da reta mediatriz, o ponto M[36], o semicírculo e desabilite o rótulo dos demais pontos;

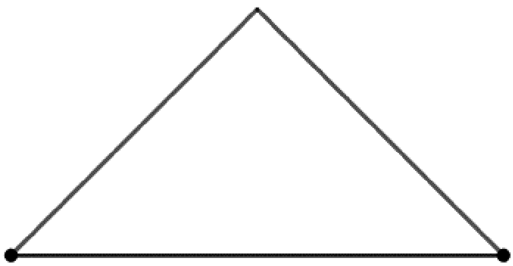


Figura 10 – Triângulo grande.

36 Para todas as peças do Tangram, deixaremos visíveis apenas os dois pontos construídos inicialmente. O primeiro ponto permite transladar e o segundo rotacionar a figura no plano, os demais pontos serão ocultados.

Fonte: As autoras

11. Para construir o outro triangulo grande, selecione o triângulo que foi construído, copie (CTRL+C) e cole (CTRL+V);

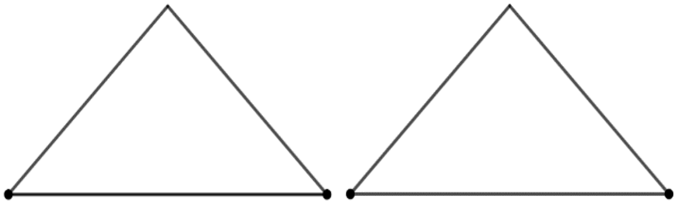


Figura 11 – Dois triângulos grandes.

Fonte: As autoras

12. Os dois triângulos pequenos serão construídos de forma análoga aos triângulos grandes, no entanto, quando selecionar a ferramenta *Segmento com Comprimento Fixo*, em *Comprimento* digite a medida do lado do quadrado base dividido por 2 (f/2). O restante e só seguir os demais passos da construção do triângulo grande;

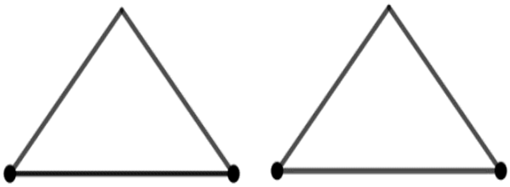


Figura 12 – Dois Triângulos pequenos.

Fonte: As autoras.

13. Para construir o triângulo retângulo médio[37], selecione a ferramenta *Segmento com Comprimento Fixo* , clique na janela de visualização e em *Comprimento* digite a medida do lado do quadrado base dividido por dois (f/2). Selecione a ferramenta *Reta Perpendicular*  e faça uma reta perpendicular no ponto Q;

14. Selecione a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*  clique primeiro no ponto Q para definir o centro e posteriormente no ponto R para definir o raio. Na sequência, com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*  faça a interseção do círculo com a reta perpendicular;

37 A construção do triângulo médio poderia ser análoga a dos triângulos grandes e pequenos utilizando como comprimento da hipotenusa a medida da metade da diagonal do quadrado base.

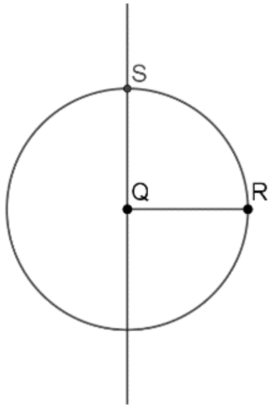
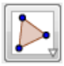


Figura 13 – Construção do triângulo médio .

Fonte: As autoras

15. Com a ferramenta *Polígono*  clique sobre os pontos Q,R,S e Q, obtendo o triângulo QRS. Na janela de álgebra, desative a visualização da reta, do círculo, do ponto S e desabilite o rótulo dos demais pontos.

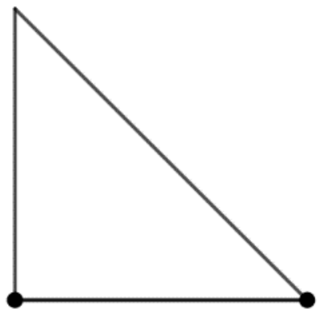
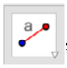
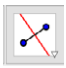
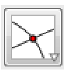


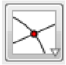
Figura 14 – Triângulo médio.

Fonte: As autoras.

16. Para construir o quadrado[38], construímos primeiro a sua diagonal. Para isto, selecione a ferramenta Segmento com Comprimento Fixo , clique na janela de visualização e em Comprimento digite a medida do lado do quadrado base (f/2);

17. Com a ferramenta *Mediatriz*  clique nos dois pontos T e U ou no segmento TU criando a mediatriz desse segmento. Utilizando a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*  faça a interseção do segmento com a reta mediatriz.

38 A construção desse quadrado poderia ser realizada de forma análoga a do quadrado base utilizando como comprimento do lado um quarto da medida da diagonal do quadrado base.

18. Selecione a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*  clique primeiro no ponto V para definir o centro e no ponto T ou U, para definir o raio. Em seguida, com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*  faça a interseção do círculo com a reta mediatriz para definir a intersecção destes dois objetos;

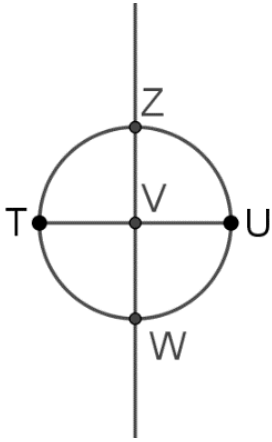
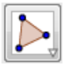


Figura 15 – Construção do quadrado .

Fonte: As autoras

19. Com a ferramenta *Polígono*  clique sobre os pontos T,Z,U,W e T, obtendo o quadrado TZUW. Na janela de álgebra, desative a visualização do segmento de reta, da reta mediatriz, do círculo, dos pontos V,W e Z e desabilite o rótulo dos demais pontos.

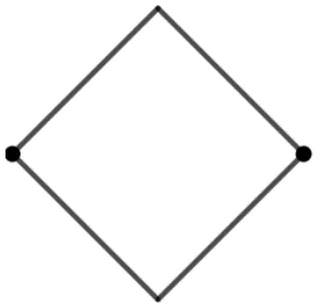


Figura 16 – Quadrado.

Fonte: As autoras

20. Para construir o paralelogramo, selecione a ferramenta *Segmento com Comprimento Fixo*  clique na janela de visualização e em *Comprimento* digite a medida do lado do quadrado base dividido por dois;

21. Em seguida selecione a ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa . Clique no ponto, em seguida no ponto quando abrir a janela, altere o ângulo para 45º no sentido anti-horário. Em seguida, faça de para e altere o ângulo para no sentido horário. Serão criados os pontos e respectivamente;

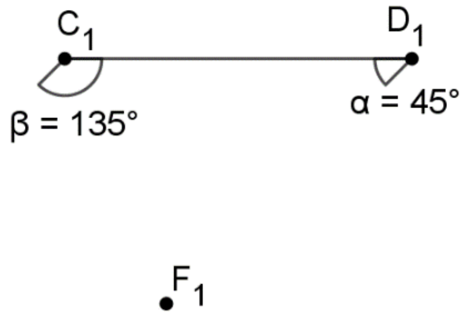


Figura 17 – Construção dos ângulos.

Fonte: As autoras

22. Selecione a ferramenta *Semirreta* e construa as duas semirretas e . Com a ferramenta *Círculo dados Centro e Raio* construa uma circunferência de centro em e cujo raio é um quarto da diagonal do quadrado base, ou seja, $\frac{1}{4} f\sqrt{2}$. No GeoGebra o comando para raiz quadrada é sqrt, logo a expressão correspondente é 1/4f * sqrt(2). Com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* faça a intersecção das duas semirretas com o círculo, obtendo os pontos e ;

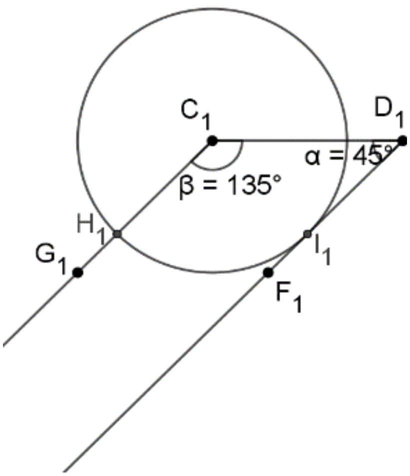


Figura 18 – Construção do paralelogramo .

Fonte: As autoras

23. Com a ferramenta *Polígono* clique sobre os pontos e obtendo o paralelogramo . Na janela de álgebra, desative a visualização dos ângulos e , as semirretas, o círculo, os pontos e e desabilite o rótulo dos demais pontos;

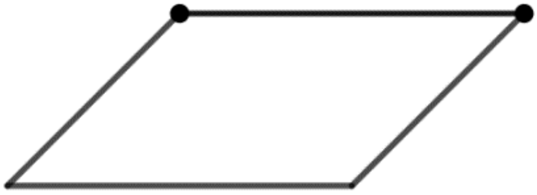


Figura 19 – Paralelogramo.

Fonte: As autoras

24. Em Propriedades altere as configurações de cor dos triângulos, quadrado e paralelogramo, como mostra a Figura 20.

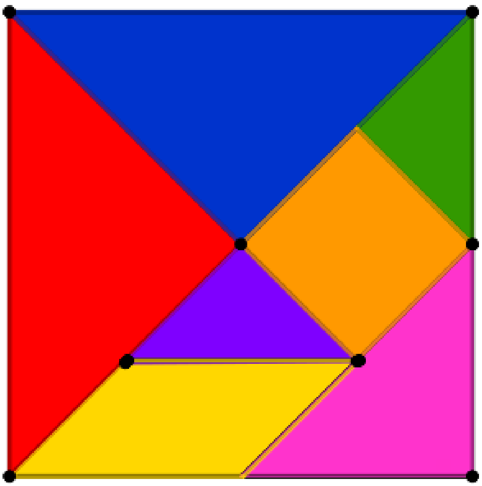


Figura 20 - Tangram finalizado.

Fonte: As autoras

Assim, por meio dessa ferramenta, foi possível elaborar questões que explorassem conceitos geométricos durante a construção do Tangram. A ideia é que o professor trabalhe essas questões paralelamente à construção.

Questão 1: Por que precisamos construir duas circunferências (uma com centro em A e outra com centro em B) na etapa 3 para garantir a construção do quadrado?

Questão 2: Na etapa 6, construímos pontos médios. O que você entende por ponto médio?

Questão 3: Qual a necessidade da construção da mediatriz e do semicírculo para obter o triângulo maior na etapa 9?

Questão 4: Qual a necessidade da reta perpendicular e da circunferência para obter o triângulo médio nas etapas 13 e 14?

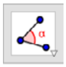
Questão 5: Diante de uma necessidade de construção de um triângulo retângulo conhecido a medida da hipotenusa e dos catetos, qual das duas construções anteriores você recorreria?

Questão 6: Qual a necessidade da mediatriz e da circunferência para construir o quadrado obtido na etapa 19?

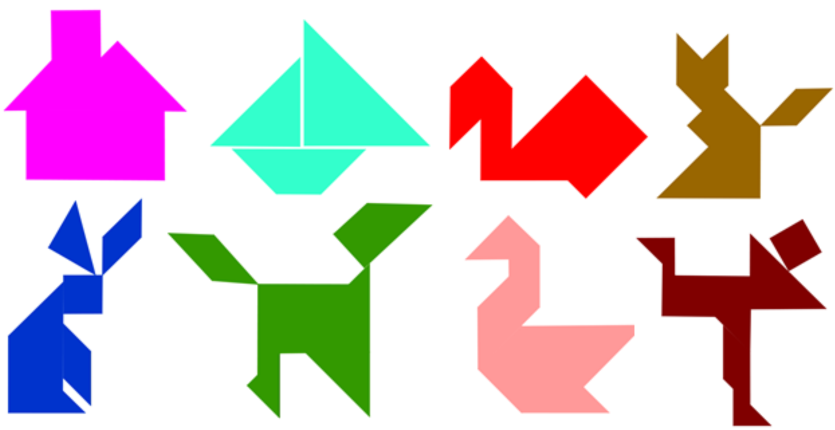
Questão 7: Qual a relação entre os ângulos construídos na etapa 21?

Questão 8: Justifique a construção do paralelogramo da etapa 20 à etapa 23.

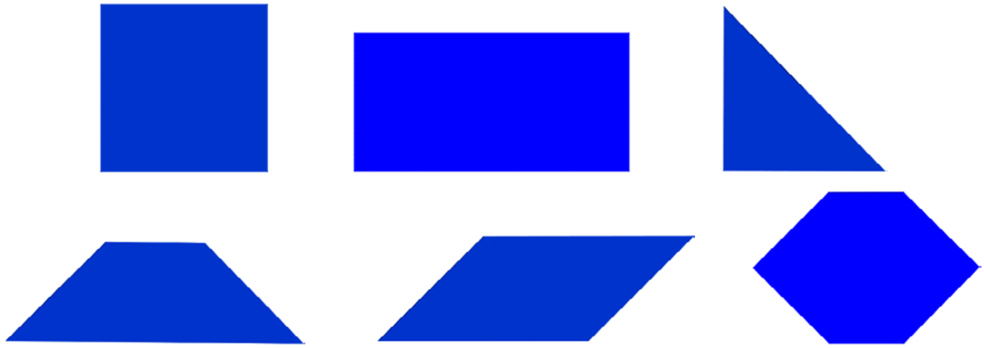
A seguir, algumas sugestões de tarefas a serem realizadas com as peças do Tangram construídas no *software*.

Observação: Para formar algumas figuras, será necessário fazer uma reflexão no paralelogramo construído inicialmente, para isto construa uma reta qualquer e use a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta*  clique no paralelogramo e em seguida clique na reta, será criado o paralelogramo. Para transladar ou rotacionar este paralelogramo será necessário movimentar o paralelogramo inicial.

Tarefas 1: No GeoGebra, use todas as peças do Tangram e represente as seguintes figuras:



Tarefas 2: No GeoGebra, use todas as peças do Tangram e monte as figuras geométricas planas abaixo:



2.1. Calcule a área de cada uma das figuras geométricas planas construídas. Existe relação entre as áreas destas figuras? Se sim, qual? (Sugestão: Utilize a janela de álgebra para calcular as áreas);

2.2. Calcule o perímetro de cada uma das figuras geométricas planas construídas. Existe relação entre os perímetros destas figuras? Se sim, qual? (Sugestão: Utilize a janela de álgebra para calcular os perímetros);

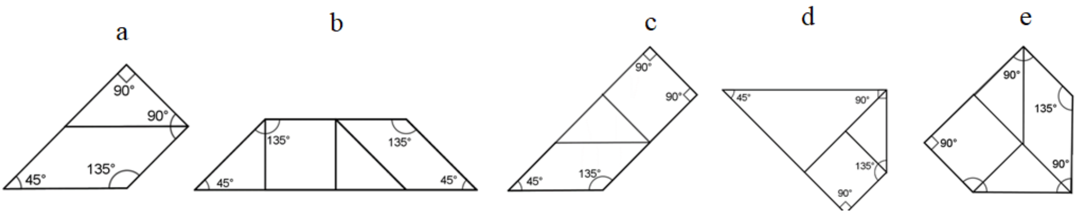
Por fim, com este trabalho o professor pode optar por uma das construções e realizar estas ou outras tarefas semelhantes. O trabalho com dobraduras possibilita a construção manual desenvolvendo habilidades não só matemáticas, mas motoras também e podem ser adaptadas para a série em que será aplicada. Do mesmo modo, o trabalho no GeoGebra permite que o aluno reflita sobre conceitos relacionados à construções geométricas e aprenda propriedades de Geometria. As tarefas realizadas com o Tangram possibilitam aprender Geometria enquanto são desenvolvidas. Esperamos que façam bom uso desse material, e a seguir, disponibilizamos as respostas das tarefas.

RESPOSTAS:

RESPOSTAS DAS TAREFAS COM DOBRADURAS

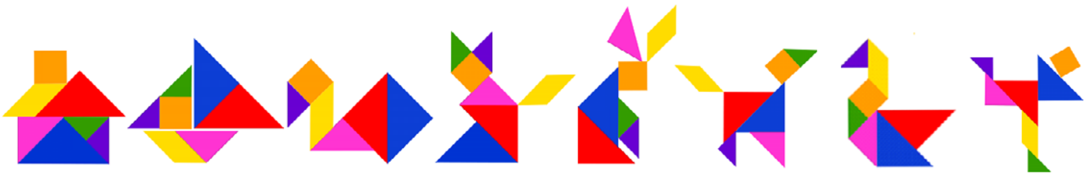
Tarefa 1: Para resolver essa tarefa, basta tomar o triângulo menor como unidade de medida de área e montar as figuras solicitadas.

Tarefa 2:



RESPOSTAS DAS TAREFAS COM O GEOGEBRA

Tarefa 1:



Tarefa 2:

REFERÊNCIAS

BONJORNO, José Roberto; BONJORNO, Regina Azenha; OLIVARES, Ayrton. **Matemática: Fazendo a diferença**, 6ª série. São Paulo: FTC, 2006.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** (Ensino Fundamental). Brasília, 2017.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamento humano:** Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales. Tradução: Myriam Vega Restrepo. Cali, Colombia: Universidade del Valle, 1999.

__________. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, p. 11-33, 2003.

__________. Les conditions conitives de l'apprentissage de la geometrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnement et coordination de leur fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, n. 10, p. 5-53, 2005.

__________. **Semiósis e Pensamento Humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

__________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. Org.: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

__________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis, v.07, n.2, p. 266-297, 2012.

GERÔNIMO, João Roberto; BARROS, Rui Marcos de Oliveira; FRANCO, Valdeni Soliani. **Geometria Euclidiana Plana:** um estudo com o software Geogebra. Maringá: Eduem, 2010.

GRAVINA, Maria Alice. **A Geometria Dinâmica:** uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p. 1-13. Belo Horizonte, 1996.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland, e Outros. **Quebra-cabeças geométricos e formas planas.** Niterói – RJ: EDUFF, 1997.

LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006, p. 3-38.

PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sergio. (org): **O laboratório de ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006, p. 77-92.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula.** 1ª ed. – Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

TAHAN, Malba. **Didática da Matemática.** São Paulo: Edição Saraiva, 1962.

Capítulo 6

DESVENDANDO SENHAS: UM ESTUDO SOBRE CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Daniela da Rosa Teza Maria Lucia Panossian

INTRODUÇÃO

Senhas em geral, combinações de 1 e 0 e a segurança no mundo virtual têm algo em comum: conceitos de análise combinatória e a probabilidade. No âmbito escolar, esses conceitos matemáticos se concretizam na forma de conteúdos presentes no ensino, conforme indicado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018).

Considerando a realidade dos estudantes, com a tecnologia envolvida em todos os eletrônicos, é necessário que cada vez mais pessoas dominem esses ramos matemáticos aliados à programação para que se tenha cada vez mais descobertas, sejam elas científicas ou simplesmente para o lazer.

No entanto, para que haja apropriação de conceitos da combinatória e de probabilidade é preciso considerar a intencionalidade do professor para organizar o ensino e o envolvimento dos estudantes para se apropriar do conteúdo. Perguntas tão enfáticas como "Aonde vou usar isso?" realizada por estudantes toda vez que se deparam com um conteúdo novo, podem ser facilmente esclarecidas quando se fala em combinatória e probabilidade.

Para que haja um ensino de qualidade que possibilite estabelecer relações com demais conceitos matemáticos é necessário compreender a necessidade humana que gerou determinado conceito e as formas de pensamento relacionadas a objetivação do conceito, ou seja, considerando o movimento histórico e lógico. Também é importante que sejam consideradas as propostas curriculares para o ensino de análise combinatória e probabilidade.

Sendo assim, essa proposta de ensino foi elaborada considerando o que vem sendo proposto pela BNCC, e também os estudos sobre o movimento histórico e lógico e de forma particular o movimento histórico e lógico específico da combinatória objetivado na situação desencadeadora de aprendizagem aqui considerada como elemento da Atividade Orientadora de Ensino (MOURA et al. 2010). Esses referenciais auxiliarão na compreensão e organização do ensino de conceitos de combinatória e probabilidade a partir do trabalho com senhas.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Considera-se aqui, o estudo de indícios do movimento histórico e lógico do raciocínio combinatório e do conceito de situação desencadeadora de aprendizagem.

MOVIMENTO HISTÓRICO E LÓGICO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

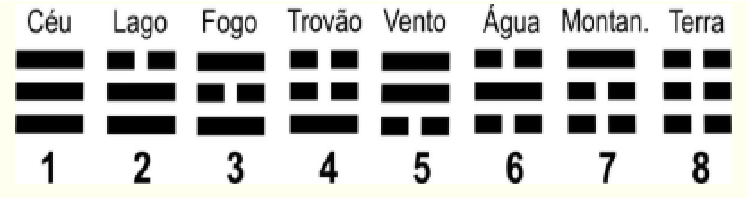
O movimento histórico e lógico do objeto em estudo, neste caso a combinatória, pode ser considerado como construído no dia a dia das civilizações. Segundo Sousa (2018), o histórico estuda o meio de mudança do objeto, os estágios de seu surgimento e desenvolvimento. E, segundo Kopnin (1978, p. 184), "O lógico é o reflexo do histórico por meio de suas abstrações e aqui dá-se atenção principal à manutenção da linha principal do precoce histórico real.".

Através do movimento histórico e lógico pode-se indicar as necessidades de várias civilizações em relação a combinatória desde milênios antes de Cristo até a atualidade. Para isso, não se pretende contar a história, mas fazer referência aos momentos em que a humanidade necessitou e necessita destes conceitos.

Não é possível especificar e datar o início do desenvolvimento do raciocínio combinatório, no entanto livros de história da matemática como Eves (1997), Boyer e Merzbach (2012) revelam que suas primeiras aparições são de longa data e que o raciocínio combinatório foi utilizado para solucionar problemas relacionados a jogos, contagem e envolvia também, crenças e religiões.

Um desses primeiros registros do raciocínio combinatório aconteceu em torno do século XII a. C. com o Livro I Ching conhecido como o mais antigo do mundo. O livro I Ching baseia-se na ideia de mutação contínua, ou seja, reunindo linhas inteiras e interrompidas (chamadas de Yin e Yang) em grupos de três, foi possível obter combinações e cada uma delas tem um nome e um significado (como Terra, água, trovão).

FIGURA 1- Representação de Yin- Yang.



FONTE: Disponível em:<http://taoismo.org/modules/smartsection/item.php?itemid=21>.Acesso em: 06 jun. 2019.

Historicamente, os hebreus se assemelham aos chineses pois acreditavam que determinadas combinações de letras teriam poderes sobre a natureza e tinham a necessidade de conhecer e dominar tais técnicas. Estas combinações, ao contrário do Yin-Yang dos chineses, eram formadas por vinte e duas letras do alfabeto e acreditava-se que tinham poderes mágicos.

No início da Era Cristã, essa relação fechada entre a matemática e a ciência mística dos hebreus ficou conhecida como Cabala. O significado de Cabala provém dos judeus e é considerada a alma de todo o sistema judaico de misticismo e meditações secretas. Por conta desse misticismo, ela foi estudada secretamente por séculos, e transmitida oralmente. Porém, há evidências que matemáticos como Georg Cantor (1845- 1918), Isaac Newton (1643- 1727) não só tinham interesse e estudavam profundamente como eram considerados cabalísticos.

A relação da Cabala com a combinatória consiste na crença de que a cada letra do alfabeto hebraico foi associado um valor numérico e assim, a cada combinação era atribuído um significado.

Além do viés religioso, as combinações e o raciocínio combinatório tornaram-se fortemente presentes durante conflitos mundiais, desde 100 a. C., pois, havia a necessidade de que as mensagens enviadas entre as tropas fossem por um meio seguro e para que não fossem descobertas pelos adversários. No entanto, como as palavras podiam ter significado ou não, o tempo para interpretá-las era muito extenso e ainda, corria-se o risco de algum estudioso, decifrá-la. Deste modo, as permutações de letras tiveram suas primeiras aparições. A essa forma de se codificar mensagens, dá-se o nome de **criptografia**.

A criptografia (palavra derivada do grego*kryptos*, escondido e*graphein*– escrita) é o estudo de técnicas para ocultar qualquer informação. Júlio Cesar (100 a. C. – 44 a. C.) utilizava o método conhecido como Cifra de César (o nome do método foi dado em homenagem ao próprio Júlio César) para repassar mensagens aos generais. A Figura 2 ilustra como as mensagens eram codificadas.

FIGURA 2 - Cifra de César.

Alfabeto original

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	W	Y	Z

Alfabeto cifrado

D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	W	Y	Z	A	B	C

FONTE: Adaptada de: <http://m3.ime.unicamp.br/dl/1-EDXIrwwNQ_MDA_aa9b4_>. Acesso em: 10 nov. 2018.

A ação de uma cifra de César é mover cada letra do alfabeto um número de vezes fixo no alfabeto abaixo. Assim, diversas cifras de César podem ser formuladas, basta variar o número de trocas.

Considerando uma troca de três, a interjeição "EBA" por exemplo, seria representada pela palavra "HED". A Cifra de César é um sistema de criptografia muito prático e não foi o único modo de criptografar mensagens desenvolvido para suprir as necessidades de sigilo durante as guerras.

Já o código Morse, por exemplo, foi criado em 1830 e leva o nome de seu inventor estadunidense, Samuel Morse (1791- 1872) que também era artista. Trata-se de um sistema de comunicação eletrônico que é formado por dois tons sonoros distintos (representados por pontos, traços e espaços). A cada palavra que deseja-se referir, a representação varia de acordo com a sonoridade que possui e assim, os traços e pontos são combinados para formar o texto de uma mensagem[39].

O Código Morse trata de um sistema de codificação seguro e, foi utilizado durante

39 Fonte: Disponível em: <https://escola.britannica.com.br/levels/fundamental/article/c%C3%B3di-go-Morse/481963>. Acesso em: 25 mai. 2019.

muitos anos pois não dependia do correio para que a mensagem chegasse ao destinatário como acontecia antes com outros métodos de codificação.

Uma situação como essa,é interpretada no filme "O jogo da imitação"[40]quando o governo britânico decide quebrar o código quealemães utilizavam para se comunicarem comseussubmarinos.Porém, haviam muitas combinações que poderiam ser realizadas. AlanTuring (interpretado no filme pelo ator Benedict Cumberbatch), um matemático estritamente lógico tem como objetivo fazer todas as possíveis combinações (com auxílio da tecnologia da época) para descobrira mensagem enviada em apenas dezoitohoras.

Além destes exemplos, Rosa (1998) apresenta outros ramos da Matemática em que se tem a necessidade da análise combinatória:

> A partir de meados do século XVIII, a Análise Combinatória passou a ser utilizada em vários ramos da Matemática como Estatística, Álgebra, Probabilidade, Lógica, etc., e em outras áreas do conhecimento humano como Biologia Molecular, Programação de Computadores, Economia, Teoria da Programação para o Bom Funcionamento da Empresa, etc. (ROSA, 1998, p. 04).

A compreensão sobre o movimento histórico e lógico do raciocínio combinatório assim como as necessidades apresentadas pela humanidade são aprofundados em Teza (2018).

A partir das necessidades apresentadas e agora, nas últimas décadas a análise combinatória e a probabilidade têm seu crédito quando se fala em tecnologia: geração de senhas, contas de *e-mail*, codificação de mensagens virtuais utilizando criptografia e também, identificação de usuários da rede. Considerando essa tecnologia na realidade dos estudantes, se faz necessário ensiná-los, despertando seus motivos e necessidades sobre os conceitos básicos que estão por trás dessa modernidade que os atrai.

SITUAÇÃO DESENCADEADORA DE APRENDIZAGEM

Quando se fala em atividade no cotidiano escolar, logo se pensa em uma tarefa encaminhada para o estudante, mas a compreensão do termo atividade tem outra conotação quando são adotados os referenciais teóricos da Teoria Histórico-Cultural e Atividade Orientadora de Ensino.

Atividade será compreendida segundo os pressupostos teóricos de Leontiev (1978)

40 O filme "Jogo da imitação" foi lançado em 5 de fevereiro de 2015. Direção de: Morten Tyldum. Gênero: Biografia, Drama. Nacionalidade: EUA, Reino Unido.

que analisa a atividade tendo em seu fundamento principal o caráter ontológico do trabalho. É o trabalho que permite ao ser humano ter as condições objetivas de se humanizar, por meio da transformação da natureza para seu proveito. Deste modo, o sujeito é capaz de realizar a construção de objetos/instrumentos e de procedimentos que são apropriados pelos seres humanos, com a intenção de possuir condições materiais e espirituais com vistas de saciar as suas necessidades, ou seja, é a partir da atividade que se explica o processo de mediação entre o homem e a realidade.

Assim, de maneira geral, Leontiev trata de atividade como unidade de análise do psiquismo humano e, é de forma específica que trabalha-se com a atividade de ensino.

De acordo Moretti (2009) a atividade é despertada por um motivo e este mobiliza o sujeito a executar ações que possibilitam a satisfação de suas necessidades.

Deste modo, uma ação só se constitui em atividade quando cria no sujeito a necessidade de realizá-la e o seu motivo coincide com o objeto. A atividade do professor se constitui em atividade de ensino quando este tem a necessidade de ensinar e organizar o ensino a fim de facilitar e mediar a aprendizagem dos seus estudantes. É nesse sentido que Moura e outros (2010) propõe a Atividade Orientadora de Ensino. A situação desencadeadora de aprendizagem aparece como um elemento da Atividade Orientadora de Ensino. De acordo com os autores,

> Na AOE, ambos, professor e aluno, são sujeitos em atividade e como sujeitos se constituem como indivíduos portadores de conhecimentos, valores e afetividade que estarão presentes no modo como realizarão as ações que têm por objetivo um conhecimento de qualidade nova. Tomar consciência de que sujeitos em atividade são indivíduos é primordial para considerar a Atividade Orientadora de Ensino como um processo de aproximação constante do objeto: o conhecimento de qualidade nova. A atividade assim, só pode ser orientadora. (MOURA et al; 2010, p. 218).

Nesse sentido, a AOE deve propiciar o aparecimento do motivo para desencadear a aprendizagem e assim, o sujeito se apropria do conceito. Deste modo, a situação desencadeadora de aprendizagem exige do professor uma organização do ensino que apresente a importância histórica do conceito e também, sobre como ele se desenvolveu logicamente, ou seja, como forma de pensamento.

De acordo com Moura (2017) há diversos modos de se desencadear o processo de aprendizagem. A história virtual do conceito é um desses processos e além dela, há outras situações desencadeadoras de aprendizagem que colocam os estudantes presentes nas situações. Estas situações são caracterizadas pelos jogos e pelas situações do cotidiano. Segundo Moura (2017, p. 94), é a compreensão do desenvolvimento do histórico-lógico do conceito que, desse modo, poderá propiciar a colocação do problema de aprendizagem do aluno tendo como fonte tanto a história quanto situações de jogo ou aquelas emergentes do cotidiano.

Assim, o objeto da atividade pedagógica é a transformação dos estudantes no processo de apropriação dos conhecimentos e saberes; por meio dessa atividade é que se materializa a necessidade humana de se apropriar dos bens culturais.

Considerando as opções que se têm para propor uma situação desencadeadora de aprendizagem, seja ela qual for, o essencial é que a situação contribua para o estudante entender sua origem como processo provindo das necessidades humanas e que, considerando o desenvolvimento histórico e lógico há a produção de ferramentas que serão aplicáveis em situações semelhantes.

A RELAÇÃO ENTRE SENHAS E ANÁLISE COMBINATÓRIA

Nesta proposta de ensino pretende-se abordar o conteúdo matemático de combinatória articulado ao uso de senhas. As senhas são utilizadas para entrar em *e-mails*, jogos *online*, serviços bancários dentre outras inúmeras aplicações. Seja para realizar compras na internet, consultar saldo bancário, desbloquear o telefone celular ou simplesmente para entrar em um condomínio.

Considerando essa realidade, há a necessidade de se considerar o outro lado que a tecnologia também dispõe: métodos de *hackear* senhas são cada vez mais utilizados. Pensando nisso, diversos sites disponibilizam para um novo usuário, um sistema que capta o nível de dificuldade de ser descoberta uma determinada senha[41]. Senhas com apenas letras minúsculas são consideradas “fracas” em relação a senhas que contenham caracteres como números, letras maiúsculas e minúsculas ao mesmo tempo.

As máquinas precisam ser programadas para indicar o nível de dificuldade de uma senha. Sendo assim, para uma compreensão da programação dessas máquinas é necessário dominar alguns conteúdos matemáticos como Análise Combinatória e Probabilidade.

A necessidade de se estabelecer métodos de contagem dos objetos de um determinado grupo ou conjunto, podendo repeti-los ou não, podem ser observadas já na obra intitulada *Lilavati,* de Bháskara (1114-1185). Conforme Souza (2010), nesta obra a ideia de combinatória é apresentada mais de uma vez

41 Por exemplo, como no site http://new.safernet.org.br. Acesso em 06 jun. 2019.

Nesse movimento envolvendo Bháskara, nota-se que a necessidade de possuir um raciocínio combinatório estava indo muito além do que resolver apenas um problema cotidiano. Generalizações começaram a ser realizadas uma vez que situações parecidas começaram a se repetir e podiam ser solucionadas de uma forma muito semelhante, e assim surgiu a necessidade das fórmulas.

De forma científica, Pierre Fermat (1601- 1665) e Blaise Pascal (1623-1662) deram o ponto de partida para o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades tamanha necessidade do raciocínio combinatório para serem solucionadas. Por anos eles passaram a trocar cartas para discutirem sobre novas descobertas e curiosidades que haviam feito e assim, foram dando início ao cálculo combinatório.

Na sequência, diversos matemáticos viciados em jogos, como Girolamo Cardano (1501- 1576), Jakob Bernoulli (1654- 1705), Euler (1707- 1783) foram também, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio combinatório através das conclusões que começaram a ter sobre o vício nas cartas. Nota-se nesse específico momento da história que abrange pelo menos 200 anos, o quanto vencer um jogo tornou-se necessidade humana, sendo o desencadeador de conhecimentos.

Entende-se que para a compreensão de probabilidade, é necessária a formalização de conceitos de análise combinatória e é nesse contexto, que foi realizado o estudo aprofundado acerca do raciocínio combinatório. Sendo assim, este último pode ser compreendido de diversas maneiras. Pessoa (2009) entende que:

> [...] a análise combinatória é a parte da matemática que estuda os agrupamentos a partir de alguns critérios; a combinatória é o assunto referente a esta parte da Matemática e que está diretamente relacionada com os problemas de produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação; o raciocínio combinatório é a forma de pensar referente à combinatória [...]. (PESSOA, 2009, p. 72).

Para a elaboração dessa proposta de ensino, foram estudados o movimento histórico e lógico já apresentado, assim como as relações que o mesmo estabelece com probabilidade, e também, foi estudado como esses conteúdos são propostos em documentos oficiais.

O conteúdo de combinatória tem presença em anos iniciais do ensino fundamental quando trata-se de combinações de roupas, cardápios, etc. No entanto, a proposta aqui apresentada visa os anos finais do ensino fundamental. Por esse motivo a Tabela 1 a seguir, mostra como a combinatória e a probabilidade estão sendo propostas na BNCC (BRASIL, 2018) para os anos finais do ensino fundamental.

TABELA 1- Probabilidade e combinatória na BNCC.

ANO	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
6º	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável. Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista).	(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
7º	Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências	(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.
8º	Princípio multiplicativo da contagem. Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
9º	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes	(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

FONTE: Organizado pelas autoras (2019), a partir de BRASIL (2018)

No sexto ano notou-se a combinatória na Unidade Temática denominada 'Probabilidade e estatística'. Para esse ano de ensino, a combinatória aparece de forma tímida uma vez que se espera que o estudante saiba realizar o cálculo de probabilidades de um determinado evento, calcular a razão entre os resultados favoráveis e os resultados possíveis e, calcular a probabilidade através de experimentos sucessivos. Ou seja, a combinatória não se apresenta como conteúdo por si só; aparece como coadjuvante no ensino de probabilidade.

No sétimo ano a análise é similar ao sexto ano já que, a combinatória aparece entre conceitos de probabilidade quando pede-se para o estudante determinar o espaço amostral de um evento. Neste ano ainda, espera-se que o estudante saiba realizar e planejar experimentos envolvendo a probabilidade.

No oitavo ano, dentro da Unidade Temática 'Números', de acordo com Brasil (2018, p. 311), espera-se que o estudante seja capaz de "Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo." e também, segundo Brasil (2018, p. 313) "Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.".

No último ano do ensino fundamental, a estatística mostra-se presente no reconhecimento e cálculo de eventos dependentes e independentes, mas a análise combinatória é deixada de lado.

A probabilidade é vista como ramo matemático que trabalha de forma indireta conceitos de combinatória (por exemplo, na contagem de elementos para formação de um espaço amostral). Além disso, há também a constatação de que esse ensino não deve ser realizado com foco na aplicação de fórmulas. Assim, considerando a análise do que vem sendo exigido pela BNCC para o ensino nas escolas durante os anos finais do ensino fundamental, e a realidade tecnológica que os estudantes estão imersos, sugere-se a seguinte proposta de ensino envolvendo a probabilidade e a combinatória onde os estudantes possam fazer investigações e fazer simulações envolvendo probabilidade; bem como conversar acerca de seus resultados e experiências para prever acontecimentos e modelar situações.

DESCRIÇÃO DA PROPOSTA DE ENSINO

- **Conteúdo:** Análise Combinatória (espaço amostral através de tabelas, árvore de possibilidades, arranjo simples, arranjo com repetição, arranjo condicional) e Probabilidade (Experimento aleatório, possibilidades de eventos possíveis e impossíveis).
- **Objetivo Geral:** Aprofundar os conhecimentos acerca de análise combinatória e probabilidade a partir de uma situação desencadeadora de aprendizagem.
- **Objetivo específico:**
    - Retomar conceitos de combinatória e probabilidade apropriados durantes os anos escolares.

- Determinar o espaço amostral a partir de um experimento e relacioná-lo com probabilidade.
- Compreender as relações que existem entre análise combinatória e probabilidade em uma situação problema.

- **Duração:** 4 horas/aulas
- **Recursos:** Lousa, giz, caixa trancada com cadeado com senha de três dígitos e, uma surpresa dentro da caixa.
- **Estratégias:**

Nas duas primeiras horas/aulas, o professor precisará:

- Levar para a sala de aula uma caixa trancada com um cadeado que possui uma senha de três dígitos para ser aberto.

Dica para o professor: note que essa primeira ação, despertará o interesse dos estudantes. A partir do momento em que eles tiverem ciência que ganharão o que tem dentro da caixa, se sentirão motivados a solucionar o problema proposto. Assim, ao iniciar a situação, aproveite o momento para retomar os conceitos históricos e lógicos que fizeram com que o conteúdo de combinatória e probabilidade se faça presente na sala de aula. Relate que a situação proposta é uma representação simplificada de desvendamento de senhas. Uma outra dica é a recomendação para que os estudantes assistam e comentem o filme ‘O jogo da imitação’, verifique se a faixa etária está adequada para esta sugestão.

Os estudantes trabalharão em grupos de três membros para desenvolver as próximas ações.

1º AÇÃO: DESVENDANDO A SENHA ALEATORIAMENTE

- Sugere-se ao professor que nesse primeiro momento, escolha uma senha ímpar para o cadeado, mas, que não repasse essa informação aos estudantes. Há nessa primeira ação a possibilidade de registrar com os estudantes que trata-se de um experimento aleatório, ou seja, a escolha da senha do cadeado pode ser feita e refeita várias vezes e, em cada uma das vezes é possível fazer o estudo das possibilidades para a senha correta. Instigue-os a descobrirem a senha do cadeado para que conquistem o que tem dentro da caixa. Apenas oriente que a senha é constituída por três dígitos (de 0 a 9) e que os mesmos, podem aparecer repetidamente.

Professor: observe as diversas maneiras que os estudantes se organizam para descobrir a senha. Se utilizam tabelas, árvore de possibilidades, etc. Aproveite o momento para explicar o que é o espaço amostral.
Inicie explicando espaço amostral como um conjunto que se estabelece por todos os possíveis resultados de um experimento. No caso da senha do cadeado, pode-se ter resultados como 123, 234, 432, 444. Esses elementos fazem parte do espaço amostral das possíveis senhas do cadeado.

- Solicite então que cada grupo faça uma aposta em uma possível senha.

Professor: analise com os estudantes a possibilidade de a senha ser a correta dentre todas as possibilidades que se tem a partir do espaço amostral já organizado. Veja na tabela a seguir uma possível organização que os alunos podem vir a realizar para o espaço amostral.

TABELA 2 - Possível organização de parte do espaço amostral.

000	100	200	300
001	101	201	302
002	102	202	302
003	102	203	303

FONTE: A autora (2019).

Na sequência é possível orientá-los a apostar em cinco possíveis senhas e solicitar que calculem a probabilidade destas senhas escolhidas, serem a senha que abra o cadeado. Note que os princípios de probabilidade estão sendo construídos aos poucos com os estudantes.

Para finalizar esta ação, desvende a senha que abre o cadeado fazendo com que os estudantes observem as hipóteses formuladas e as possibilidades apresentadas.

2º. AÇÃO: DESVENDANDO A SENHA A PARTIR DE ALGUMAS INFORMAÇÕES

Neste momento, o professor deve escolher uma nova senha para o cadeado e:

- Informar aos estudantes que a senha que abre o cadeado é um número par. Oriente os estudantes a calcular novamente as probabilidades das cinco senhas que foram apostadas anteriormente, de nesse segundo momento, serem a senha correta.

Professor: Aproveite o momento para diferenciar com os estudantes:

- O arranjo simples: (onde não ocorre a repetição de qualquer elemento) de arranjo com repetição, onde todos os elementos podem aparecer repetidamente. Destaque que a ordem em que os elementos são colocados é importante, e isso diferencia o arranjo da combinação.

Além disso, oriente os estudantes a perceberem que o espaço amostral diminui consideravelmente a partir da informação que a senha é um número par. E que, a probabilidade de acerto da senha se torna maior para a equipe que apostou em alguma senha par e, torna-se nula para a senha ímpar. Ou seja, pode-se trabalhar a ideia de:

- Evento certo: Quando a probabilidade de acerto é de 100%, ou seja, quando o evento é igual ao espaço amostral. Nessa situação, não se tem um evento certo, devido ao tamanho do espaço amostral disponível para a senha correta.

- Evento impossível: Quando um evento é igual ao conjunto vazio. Nesse caso, da senha par, um evento impossível seria alguma equipe com a senha ímpar acertar a senha.

Ainda nesse momento, pode-se explicar o que é um arranjo condicional (que há uma condição a ser satisfeita. Nesse caso, é necessário que a senha termine em 0, 2, 4, 6 ou 8).

- Se nenhuma equipe acertar a senha, vencerá a equipe que mais se aproximar da senha que abre o cadeado.

3º AÇÃO: CRIANDO E DESVENDANDO SENHAS ENTRE GRUPOS DE ESTUDANTES

- Agora é a vez dos grupos de estudantes elaborarem uma possível senha para que as outras equipes tentem desvendá-las.

Professor: atente-se as discussões dos alunos de quais estratégias os mesmos irão escolher para elaborar a senha. Se vão optar por repetir números ou não. Se preferirão elaborar uma senha par ou ímpar.

- Se não ocorrer o acerto, após algumas tentativas, será necessário que cada equipe forneça uma dica para auxiliar as demais equipes.

Professor: Analise cada decisão que as equipes tomarem para auxiliar a adivinhação da senha por parte das outras equipes. Peça aos estudantes que façam registros. Note se os estudantes farão referência ao tamanho do espaço amostral e se levarão em conta que as possibilidades podem ser maiores ou menores de acordo com a dica que fornecerem.

- Disponibilizar mais tempo para que os estudantes tentem adivinhar a senha das outras equipes e, após algumas tentativas, solicitar que as equipes desvendem as senhas escolhidas e analisem qual equipe mais se aproximou da senha correta.

Professor: nesse momento, pode-se indagar os estudantes sobre o que eles poderiam fazer para dificultar e/ou facilitar a adivinhação da senha.

É possível ainda, questioná-los sobre o que aconteceria se pudessem ser colocadas letras junto com esses três algarismos que compõem a senha (espera-se que os estudantes notem que o espaço amostral aumenta consideravelmente ou seja, a dificuldade de se adivinhar a senha, torna-se ainda maior).

4º AÇÃO: SISTEMATIZAÇÃO DE CONCEITOS

- Após a situação, o professor poderá utilizar-se de algumas horas/aula para retomar os conceitos de combinatória e probabilidade que os estudantes utilizaram.

- Deverão ser retomados os conceitos de como são determinadas todas as opções possíveis de resultado em um experimento (espaço amostral) e, também, como são escolhidas as opções cabíveis ao problema proposto e qual a chance do resultado ser satisfatório (probabilidade).

- **AVALIAÇÃO**

O processo avaliativo pode ocorrer de forma contínua durante o desenvolvimento das ações. Sugere-se analisar o quanto os alunos se sentiram motivados a partir da situação desencadeadora de aprendizagem; analisar a participação dos alunos durante as diversas ações que foram propostas durante a situação, assim como notar as relações que os mesmos são capazes de fazer envolvendo combinatória e probabilidade.

É interessante também solicitar aos estudantes que façam registros escritos de suas tentativas de descobrir a senha e quantificar as possibilidades de encontrar cada uma delas. Nestes registros podem ser encontradas formas não usuais de organizar a quantidade de combinações possíveis, ou as possibilidades de uma determinada senha. Por outro lado, mesmo neste momento o professor pode verificar o quanto os estudantes se apropriaram de formas como 'árvore de possibilidades' ou tabelas para o registro de suas respostas.

Também é possível que o professor avalie como os estudantes estão desenvolvendo os cálculos de probabilidades, se é sob forma de frações, em números decimais ou em porcentagens.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Escolher uma situação de ensino para apresentar a uma turma de estudantes nem sempre é tarefa simples. Muitas variáveis precisam ser consideradas como características da turma, as condições no momento da intervenção, o conhecimento matemático que se pretende abordar, entre outros. Considerando estes elementos, a proposta de ensino aqui apresentada pretendeu, abordar noções iniciais de análise combinatória e probabilidade. Tais conteúdos estão presentes no documento curricular oficial mais recente: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Esse documento homologado no ano de 2018, indica o ensino de combinatória e probabilidade para todos os anos finais do ensino fundamental, além da indicação do ensino para os anos iniciais do ensino fundamental e, também, a continuidade e aprofundamento desse ensino durante o ensino médio.

Além de reconhecer a presença deste conteúdo na BNCC, considerou-se também para a elaboração da proposta de ensino os conceitos da Atividade Orientadora de Ensino em particular, o estudo do movimento histórico e lógico do raciocínio combinatório considerando que esta compreensão possibilita que se reconheçam as necessidades humanas que geraram os conceitos matemáticos, neste caso os relacionados à combinatória e probabilidade.

Assim, a situação proposta visa relacionar os conteúdos de combinatória e probabilidade desencadeando nos estudantes a necessidade de apropriação dos conceitos e consequentemente o processo de aprendizagem, considerando fundamental o papel intencional do professor.

Procurou-se estabelecer no desenvolvimento da proposta sugestões de ações ao professor que podem e devem ser adequadas às condições do ensino em que se encontra. Cada uma destas ações está associada a um objetivo de ensino.

Espera-se que ao apresentar o tema ‘senhas’ como desencadeador do processo de aprendizagem e intencionalmente organizar ações de ensino, possam ser oferecidas aos estudantes mais possibilidades de apropriação dos conceitos de combinatória e probabilidade.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl; MERZBACH, Uta. **História da matemática**. Tradução da 3ª edição americana. São Paulo: Editora Blucher, 2012.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em:

<www.basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>. Acesso em: 01 out. 2018.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de: DOMINGUES, H. H. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

KOPNIN, Pavel Vassilyevitch. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento.** Tradução de: BEZERRA, P. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LEONTIEV, Alexis Nikolaevich. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Editora Moraes, 1978.

MORETTI, Vanessa Dias. **Contribuições da psicologia sócio-histórica para atividade docente.** Anais do IX Congresso Nacional de Psicologia Escolar e Educacional. São Paulo, SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie, 2009.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural.** São Paulo: Editora Loyola, 2017.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de; ARAÚJO, Elaine Sampaio; MORETTI, Vanessa Dias; PANOSSIAN, Maria Lucia; RIBEIRO, Flávia Dias. Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem, **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010.

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos. **Quem dança com quem**: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio. 2009. 267 f. Tese (Doutorado. Área de concentração: Didática de conteúdos específicos) Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal e Pernambuco, 2009.

ROSA, Milton. Desmistificando a Análise Combinatória. In: ENEM, VI, 1998, São Leopoldo. **Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática.** São Leopoldo: Universidade do Vale do Rio dos Sinos, 1998, p. 323- 324.

SOUSA, Maria do Carmo de. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino da matemática**. Obutchénie**: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica. Minas Gerais. v. 2, n. 1, p. 40- 68, 2018.

SOUZA, Ana Lucia Castro Pimenta de. **Análise Combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas**. 2010, 343 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

TEZA, Daniela da Rosa. **O ensino do raciocínio combinatório: considerações a partir do movimento histórico e lógico.** 2018, 103 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ciências e em Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

Capítulo 7

A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO-APRENDIZAGEM: UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA GRANDEZAS E MEDIDAS NOS 8º E 9º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Lilian Milena Ramos Carvalho

Eduardo Francisco de Oliveira

Edson Rodrigues Carvalho

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, uma proposta de ensino que favoreça o aprendizado da unidade temática grandezas e medidas, entre outras, nos anos finais do ensino fundamental, é apresentada. A justificativa para esta proposta está relacionada com os resultados em relação ao aprendizado de matemática dos estudantes do Ensino Básico em nosso país e a necessidade de buscar alternativas para auxiliar os professores que militam no ensino básico a enfrentarem o desafio de alterar esta situação. De fato, as estatísticas[42] mostram que mais da metade dos estudantes não aprende o adequado no quinto ano do ensino fundamental e a cada 100 jovens que concluem o terceiro ano do ensino médio, apenas 9, tem aprendizado adequado em Matemática.

Os órgãos responsáveis pelos destinos da educação em nosso país, conscientes do fraco desempenho de nossos estudantes, têm atuado no sentido de sugerir um caminho para a melhoria do ensino. Já não era sem tempo, pois os resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), de 2005 a 2017, nos mostram, para os anos iniciais do ensino fundamental, anos finais do ensino fundamental e ensino médio, para as redes de ensino do país, um quadro preocupante. Na verdade, a única exceção nos três níveis de ensino, está, surpreendentemente, nos anos iniciais, onde

42 Disponível em: https://www.todospelaeducacao.org.br/pag/cenarios-da-educacao. Acesso em: 03 mar. 2019.

o Ideb superou a meta prevista para 2017. Digo surpreendentemente, porque se a matemática contribuiu decisivamente para este resultado, então, por que em níveis superiores houve um declínio assustador neste indicador? A Tabela 1, abaixo, mostra os índices de 2005 a 2017, incluindo a meta para 2017 nos três níveis.

Tabela 1-Anos iniciais, finais e ensino médio, respectivamente.

2005	2007	2009	2011	2013	2015	2017	META/2017
3,8	4,2	4,6	5,0	5,2	5,5	5,8	5,5
3,5	3,8	4,0	4,1	4,2	4,5	4,7	5,0
3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	3,7	3,8	4,7

Fonte: http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/ideb/resultados

De acordo com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (Inep), estes indicadores permitem uma avaliação mais fundamentada das escolas e dos sistemas educacionais. As metas projetadas para 2021 são, respectivamente, 6,0, 5,5 e 5,2, anos iniciais do ensino fundamental, anos finais do ensino fundamental e ensino médio. Se olharmos as taxas médias de variação para os três níveis, estas projeções só podem ser atingidas para os anos iniciais.

Demo (2017), analisando os resultados do Ideb, afirma:

> Chama mais atenção no Brasil a decadência da matemática (no ensino médio parece em extinção!), tocada pelo licenciado, bem como o fato surpreendente de que a matemática que tem alguma chance na escola é a do pedagogo nos anos iniciais, logo quem em geral é visto como foragido de matemática. O que teria este que aquele não tem? Podemos especular em torno disso, enquanto não resolvemos mais detidamente via pesquisas direcionadas. Provavelmente, o pedagogo trabalha a matemática mais próxima do cotidiano (aquela que todos praticam, como contar dinheiro e dar troco, lidar com quantidades da vida real, etc.), enquanto o licenciado trabalha matemática mais abstrata, formal, modelar; não fosse um exagero, diríamos que o primeiro cuida da matemática do senso comum, enquanto o segundo da matemática "científica"... Não é bem assim, naturalmente, porque o pedagogo pode também ser bom matemático, enquanto os dados insinuam que o licenciado é caprichosamente inepto.

Viana (2016), atual diretor do IMPA, em entrevista à Folha de São Paulo na seção Ciência, manifestou-se a respeito do ensino de matemática no Brasil, chamando-o de catastrófico. Segundo ele, "o Brasil patina na educação básica e a formação de professores nas licenciaturas é catastrófica. As crianças nascem gostando de matemática. Os professores é que se encarregam de acabar com isso".

Salvo melhor juízo, ainda Viana (2016), chama a atenção para a formação inicial do professor de matemática relacionando-a com o fraco desempenho dos alunos na educação básica. Este, de fato, é um parâmetro que não pode ser desprezado, levando-se em conta o papel que o professor do ensino básico desempenha na formação daqueles em que o país deposita as maiores esperanças.

No cenário nacional, os resultados do aprendizado em matemática revelam que 55% das crianças de 8 a 9 anos não sabem ler e, destas, apenas 18,2% sabem alguma matemática no final do ensino fundamental. Como se não bastasse isso, 92,7% dos alunos que concluem o ensino médio não apresentam um conhecimento matemático compatível com o nível de escolaridade. Isto significa que a defasagem entre o que o aluno deveria saber de matemática e o que efetivamente sabe é muito alta, segundo os critérios estabelecidos pelo Ideb.

Tendo em vista a necessidade premente de mudanças, não só da política educacional, mas também do conjunto de aprendizagens essenciais que os alunos precisam desenvolver ao longo do ensino básico para adequarem-se aos novos tempos, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017), nos dizeres do então Ministro da Educação, Mendonça Filho, veio para implantar uma política educacional articulada e integrada tendo como protagonistas desta transformação as redes de ensino e os professores. Além disso, apresenta de forma clara e objetiva um conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis a todos os estudantes, constituindo uma referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação dos currículos e propostas pedagógicas das instituições escolares públicas e privadas. No contexto do compromisso com a educação integral, a BNCC afirma que: No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com as informações cada vez mais disponíveis, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades.

Em particular, com relação à matemática no ensino fundamental - anos finais, a BNCC afirma que:

> Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente

> do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o conceito, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. Para favorecer esta abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvidos. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto (BNCC, 2017, p. 299).

É neste cenário desafiador que incitamos os professores de matemática do ensino básico para realizarem uma real reflexão dos seus fazeres pedagógicos, olharem a forma como estão desenvolvendo os seus trabalhos e analisarem os resultados alcançados. Uma forma de iniciar este processo seria perguntando a si mesmo: Como tornar as aulas de matemática atrativas para que os estudantes possam realmente se interessar em aprender matemática? Na literatura, existem muitas metodologias de ensino que poderiam ser utilizadas com sucesso, dependendo da criatividade, esforço e desejo do professor de construir o seu conhecimento e permitir que seus alunos possam construir o seu.

Assim, à luz da BNCC, o objetivo deste capítulo, dirigido ao personagem que está diretamente envolvido neste contexto, que é o professor de matemática do ensino básico, é utilizar a modelagem matemática como uma metodologia de ensino na elaboração de uma proposta de ensino que favoreça o aprendizado de **grandezas e medidas** e outras unidades temáticas para os anos finais do ensino fundamental. Esperamos que esta contribuição possa servir como modelo aos professores do ensino básico de modo que possam melhorar a aprendizagem de matemática em suas escolas.

REFERENCIAL TEÓRICO

Os dados apresentados na introdução deste capítulo apontam que há necessidade urgente de se buscar alternativas para a melhoria do ensino de matemática no nível básico. Uma das alternativas, mas também certamente não a única, é atacar a formação continuada de professores. Estes precisam estar em sintonia com as mudanças sociais que ocorrem em grande velocidade, de modo que suas ações nas escolas precisam transcender o lugar comum, isto é, buscarem formas de estabelecer relações entre o conteúdo previsto e a forma como este se acomoda no mundo real. Isto significa que o professor precisa estar constantemente atualizando seu conhecimento geral, que pode ser obtido por meio de formações continuadas a serem propiciadas, de alguma forma, pelo estado. Embora pareça que a formação continuada esteja desvinculada da formação inicial, ambas estão acopladas pelo conhecimento necessário que o professor de matemática precisa ter para exercer com segurança e eficiência o seu trabalho. De fato, conforme argumenta Sandes e Moreira (2018), o professor de matemática não é bem preparado em sua formação inicial, sobretudo no que diz respeito a Educação Matemática, no sentido de conseguir realizar um trabalho de qualidade em sala de aula e "[...]consequentemente, a formação desses estudantes, possivelmente, será precária e representará pouco para sua constituição como sujeito capaz de utilizar, na prática, esses ensinamentos adquiridos no ambiente escolar. (SANDES e MOREIRA 2018, p. 101).

O curso de licenciatura de acordo com Giraldo (2017), na verdade é fragmento de um curso de bacharelado, ou seja, retiram-se algumas disciplinas e acrescenta outras que são voltadas para a prática pedagógica. Na verdade, a formação inicial não prepara o professor para a realidade de uma sala de aula, não dá o subsídio necessário para que este profissional obtenha êxito em suas práticas pedagógicas.

Essa perspectiva baseia-se em premissas sobre aquilo que o professor não precisa saber, desconsidera os conhecimentos necessários para a sala de aula, e desqualifica o ensino de matemática na escola básica como uma atividade profissional com práticas, recursos e saberes próprios. Busca-se, em lugar disso, construir uma identidade própria para os cursos de Licenciatura de Matemática, que leve em conta as necessidades que emergem da futura prática docente. (NACARATO. et. al. 2019)

Conforme destaca D'Ambrósio (2001, p.15), "O grande desafio que nós, educadores matemáticos, encontramos é tornar a matemática interessante, isto é, atrativa; relevante, isto é, útil; e atual, isto é, integrada no mundo de hoje". Para isto, existe a real necessidade em rever os métodos de ensino utilizados atualmente, contextualizar mais as aulas de matemática e dar sentido ao porque de estudar tais conteúdos.

> [...] a insatisfação revela que há problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama [...]. (D'AMBRÓSIO, 1996, p.78).

Nesta linha de pensamento de D'Ambrósio (2001, p.15) e D'AMBRÓSIO, (1996, p.78), podemos enumerar três situações importantes que justificam a grande preocupação com o ensino-aprendizagem de matemática do ensino básico:

- A matemática tornou-se a linguagem de todas as ciências que necessitam de precisão para conseguir explicar de forma lógica o comportamento de qualquer sistema real. Uma consequência disto é que o ensino de matemática necessita ser revisto já no ensino básico para atender a esta demanda.

- A matemática, por si só, é uma ciência que para ser compreendida exige necessariamente **atenção, dedicação e persistência**. Assim, há a necessidade de que os professores do ensino básico encontrem mecanismos para superar estas dificuldades.

- A matemática precisa acompanhar as necessidades da sociedade atual, sujeita como nunca a grandes mudanças impostas pelo desenvolvimento tecnológico e às interações naturais provenientes do crescimento populacional. Isto significa que ensinar matemática no ensino básico passou a ser um desafio de altas proporções dada a velocidade das transformações sociais. Urgentemente, o professor do ensino básico precisa acompanhar estas mudanças e buscar meios de renovar sua forma de ensinar, pois, seu público alvo já não é estático e quer participar do seu processo de aprendizagem.

Como podemos verificar, com base no exposto até o presente momento, tanto a formação inicial do professor de matemática, quanto a continuada, necessita ser repensada, visto que os resultados não estão aparecendo, o desgosto por essa disciplina por parte dos estudantes apenas aumentando e os professores em serviço desmotivados, inclusive com sua profissão.

Burak (2016), no começo de sua pesquisa, na década de 90, já relatava alguns problemas iniciais referente ao despreparo dos professores; na ocasião apontando a desatualização referente aos conteúdos e inovações metodológicas nas series iniciais de 1ª a 4ª ou de 5ª a 8ª série onde o profissional tinha pouco interesse pela matemática, fruto de uma formação generalista evidenciando uma formação inicial deficiente e ressaltando a falta de um programa de atualização permanente em serviço. Outro ponto relatado por Burak (2016), neste contexto, se refere aos conteúdos transmitidos aos estudantes de forma descontextualizada, ou seja, sem significado para os mesmos, gerando assim falta de interesse, pois não tinham motivos para estarem estudando o conteúdo em questão.

Com relação aos tipos de formações continuadas, podemos analisá-las de duas maneiras: a formal, organizado por instituições especializadas no assunto; e a informal, esta baseada na troca de conhecimento entre os pares, oriundos de experiências práticas e da interiorização de diferentes saberes (DEMAILLY, 1992). A segunda maneira dá a possibilidade do sujeito participante de obter novos conhecimentos e analisar e refletir sobre sua prática profissional. É o momento no qual se podem construir e ressignificar conhecimentos, crenças, valores e atitudes sobre a profissão (FERREIRA E SANTOS, 2016).

As formações continuadas na profissão docente devem atender três tipos de necessidades: pessoais, profissionais e as organizacionais. As necessidades pessoais visam atender a necessidade pessoal para a aquisição de novos conhecimentos que elevem o nível de competência e sabedoria. As profissionais, tem como foco atender as demandas profissionais, individuais ou de grupos. As organizacionais, buscam atender as demandas institucionais e para além do contexto escolar focando nas demandas da sociedade em geral (PACHECO; FLORES, 1999).

As concepções de formação continuada não devem estar atreladas somente às demandas sociais, e sim propiciar aos professores as condições necessárias para que possam lidar com a complexidade do ato de educar e de promover a aprendizagem, especialmente em um contexto de diversidade e de adversidades como o da escola pública. A formação docente como parte integrante de um conjunto maior de políticas públicas, tendo como objetivo contribuir para a formação permanente desses profissionais, é um dos fatores indispensáveis para uma educação cidadã e emancipadora. (SANTOS, 2017 p. 28).

Qualquer projeto de formação que esteja comprometido com as mudanças necessárias deverá estar fundamentado em uma concepção emancipatória de educação que traz em seu cerne a humanização. Emancipar significa preparar os indivíduos para participar da transformação da própria civilização, buscando o desenvolvimento de toda a humanidade. (BRAGA, 2019)

> [...] formação continuada no campo da Matemática deve colocar os professores em contato com tendências pedagógicas que proporcionem novos fazeres pedagógicos, tais como: resolução de problemas; modelagem matemática; etnomatemática; história da Matemática e investigações matemáticas. Nesse sentido, entendemos que necessitamos de propostas de formação que busquem superar a dicotomia entre teoria e prática, que reconheçam os professores como trabalhadores que produzem conhecimento. Nesse contexto, concebemos o professor como protagonista de seu desenvolvimento profissional e não como um sujeito passivo diante de formações prescritivas e esvaziadas de sentido (SANTOS, 2017, p. 35).

MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática pode ser vista inicialmente como uma das 'ferramentas metodológicas' com muito potencial a ser utilizada no ensino da matemática, estimulando alunos e professores para um aprendizado significativo. Neste sentido, Bassanezi (2004), afirma que a aprendizagem desenvolvida por meio de modelagem viabiliza o processo metodológico, uma vez que esta alia os aspectos lúdicos da matemática com o seu potencial em aplicações, possibilitando ao estudante o direcionamento de suas aptidões. Ainda, segundo Bassanezi (2004, p. 16), "A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real."

Na visão de Barbosa (2004, p. 3) "[...] Modelagem, para mim, é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade.", mudando a perspectiva de aulas tradicional - professor transcrevendo teorias no quadro e estudante copiando e reproduzindo o que lhe foi transmitido - propiciando uma matemática significativa para o estudante frente a atualidade.

As atividades de Modelagem são consideradas como oportunidades para explorar os papéis que a matemática desenvolve na sociedade contemporânea. Nem matemática nem Modelagem são "fins", mas sim "meios" para questionar a realidade vivida. Isso não significa que os alunos possam desenvolver complexas análises sobre a matemática no mundo social, mas que Modelagem possui o potencial de gerar algum nível de crítica. (BARBOSA, 2001, p.4).

Para Biembengut e Hein (2019), modelagem matemática é uma arte de formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas em uma solução particular, mas servindo posteriormente como suporte em outras teorias e aplicações. Destacam, ainda, que entre uma situação real e a matemática a modelagem é o meio de fazer ambas interagirem.

Burghes, (1981, pp13-14), apresenta os principais estádios na modelagem de problemas reais e os ilustram conforme a Figura 1.

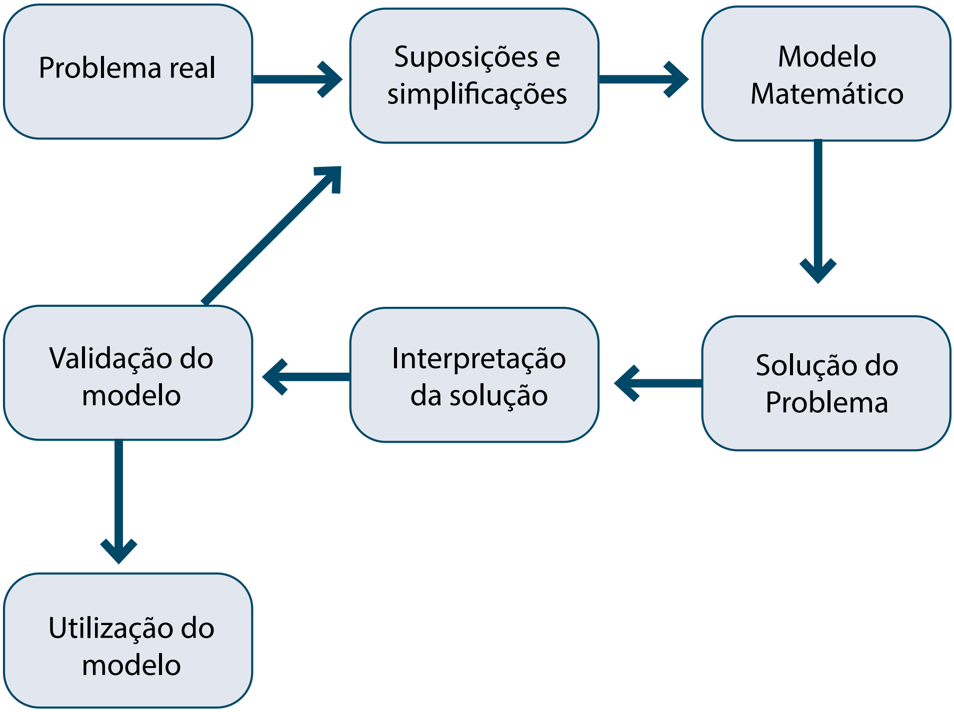


Figura 1 - Principais estádios na modelagem de problemas reais.

Fonte: Burghes (1981)

Nesta Figura, o problema relacionado ao mundo real pode ser explicar alguns dados obtidos por observação, fazer previsões ou tomar uma decisão. Para se conseguir isto é necessário fazer algumas suposições e simplificações, definindo variáveis importantes e as relações entre elas. Isto deve levar à formulação de um modelo matemático que seja passível de ser tratado. A seguir, utilizando técnicas matemáticas adequadas, o problema é resolvido. Após a solução, esta deve ser interpretada em termos do problema real, de modo que o modelo possa ser validado. Uma vez validado, o modelo pode ser utilizado para explicar, fazer previsão ou tomar uma decisão. Como menciona Burghes (1981), no diagrama, a primeira coluna representa o mundo real, a última coluna, o mundo matemático e a coluna do meio as conexões entre estes dois mundos.

Assim, não importa o tamanho ou a dificuldade do problema, o processo de interação entre uma situação do mundo real e o mundo matemático não muda. De fato, é preciso primeiro entender o problema real que temos. Depois, precisamos simplificar o problema que, em geral possui muitas formas. É esta simplificação do problema real que nos permite compreendê-lo e sermos capazes de formular um modelo matemático que melhor aproxime aquela situação real. Em geral, não sabemos exatamente que parte da matemática deve ser utilizada para solucionar o problema. Mas, no caso de uma unidade temática do ensino básico, a ser apresentada pela primeira vez ou a ser utilizada na solução de um problema, a matemática específica será óbvia e o processo de modelagem matemática deve ser conduzido pelo professor de modo inteligente a fim de que o estudante possa considerar diferentes alternativas para a solução do problema.

Murray, 2012, referindo-se à modelagem matemática na escola, argumenta que:

> A modelagem matemática também é um aspecto importante da vida cotidiana, onde todos ficarão melhores se ficarem confortáveis com ela. Ela faz parte das muitas facetas da cidadania inteligente. Que tipos de situações você quer enfatizar na escola? É tentador usar a modelagem como uma oportunidade para fazer os alunos pensarem sobre as grandes questões do nosso tempo: paz mundial, saúde, economia ou meio ambiente. O ponto principal é desenvolver uma disposição e um conforto favoráveis com a modelagem matemática, pois os grandes problemas geralmente não se resolvem com apenas duas lições.

Por outro lado, Ribeiro (2007), Biembengut (1997), Biembengut e Hein (2019), apresentam as etapas que caracterizam a modelagem matemática, que podem ser aplicadas no ensino básico. A Figura 2, a seguir, resume estas etapas.

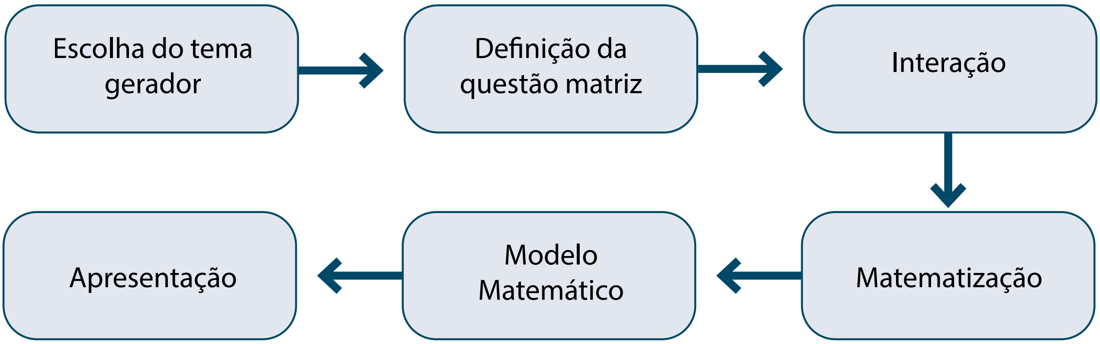


Figura 2 - Etapas que caracterizam a modelagem matemática.

Fonte: Adaptado de Ribeiro (2007), Biembengut (1997), Biembengut e Hein (2019).

A descrição de cada uma das etapas, na visão dos autores mencionados, é:

- **Escolha do Tema Gerador**: refere-se ao assunto a ser estudado, deve estar vinculado ao(s) conteúdo(s) aos quais se pretende abordar; este tema deverá encaminhar o próximo passo;
- **Definição da Questão Matriz**: elaboração de uma questão que considera o assunto definido anteriormente. Deverá contemplar o(s) conteúdo(s) previsto(s)

no referencial curricular da rede de ensino;

- **Interação**: momento no qual o estudante entra em contato com as informações necessárias para responder à questão matriz, levando em consideração aquelas advindas do professor, do livro didático, ou de outras fontes. A rigor, é preferível que o próprio estudante seja o autor dessa busca, ou seja, que as informações sejam obtidas diretamente por ele;

- **Matematização**: esse passo é destinado à sistematização das informações levantadas durante a interação, cabendo ao estudante usar as ferramentas matemáticas essenciais para tal;

- **Modelo matemático**: espera-se que, neste momento, o estudante tenha elaborado um modelo matemático (conjunto de expressões aritméticas, fórmulas, equações algébricas, representações ou programa computacional) que resolva a questão matriz proposta no início do estudo;

- **Apresentação**: destinada à exposição do processo aos colegas de turma, podendo ser uma explanação no quadro ou com cartazes, por meio de seminário, entre outros.

Com base nas etapas apresentadas por Ribeiro (2007), Biembengut (1997), Biembengut e Hein (2019), elaboramos uma proposta de ensino relacionada à temática Grandezas e Medidas, conforme prevê a BNCC, 2017, a ser desenvolvida na próxima seção.

PROPOSTA DE ENSINO: GRANDEZAS E MEDIDAS, UTILIZANDO A MODELAGEM MATEMÁTICA

Para introduzir a proposta de ensino aos estudantes, é interessante que o professor contextualize o estudo de grandezas e medidas apresentando um texto que focalize uma situação real. Neste caso, a proposta corresponde a calcular o número aproximado de pessoas que comporta um parque de diversão qualquer, onde é possível a realização de determinadas festividades.

O roteiro que segue, obedece as etapas de modelagem matemática descritas por Ribeiro (2007), Biembengut (1997), Biembengut e Hein (2019).

ANO ESCOLAR: Anos finais do ensino fundamental (8º e 9º anos)

UNIDADES TEMÁTICAS:

- Grandezas e Medidas
- Probabilidade e Estatística
- Álgebra

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

- Áreas de Figuras Planas
- Medidas de Tendência Central
- Razão entre Grandezas de Espécies Diferentes
- Densidade

DELIMITAÇÃO DAS AÇÕES: Descritas no processo de modelagem matemática

TEMA GERADOR: O assunto que queremos estudar é **Dia de festa no Parque**. Embora o tema seja amplo, o objetivo é delimitá-lo, no sentido de que estamos preocupados com o espaço disponível no parque para receber pessoas que participarão, de alguma forma, de algum evento programado. Em sala de aula, o professor inicia o processo apresentando o texto abaixo, aos estudantes, com a intenção de contextualizar o tema.

PARQUE DAS NAÇÕES INDÍGENAS

O **Parque das Nações Indígenas** é um parque urbano na cidade Campo Grande, Brasil. Ele tem 119 hectares e oferece infra-estrutura de lazer e esporte às margens de um lago formado pelas águas da nascente do córrego Prosa. Dispõe de quadras de esportes, pista de skate, patins e bicicleta, sanitários, pista para caminhada de quatro mil metros inteiramente asfaltada, além de diversos parquinhos infantis próximos às entradas, sendo um deles o primeiro parque infantil adaptado a crianças deficientes no Estado. Nas entradas do parque pequenas lanchonetes servem os visitantes com água de côco, suco, água mineral, pipoca e lanches. O parque tem policiamento e é vigiado todas horas do dia por câmeras da Polícia Militar de Mato Grosso do Sul.

O parque dispõe de local para apresentações culturais e tem como estruturas arquitetônicas principais a Concha Acústica Helena Meirelles, o Museu das Culturas Dom Bosco, o Museu de Arte Contemporânea, e o Monumento do Índio ou Monumento à Zarabatana, que é uma construção com aproximadamente 12 metros, localizada no centro do parque.

Cerca de 70% de sua vegetação é formada por gramas e árvores ornamentais originárias do seu projeto de paisagismo. Uma grande quantidade de espécies de árvores é preservada, como por exemplo o jenipapo, a mangueira e aaroeira. O córrego Prosa, que nasce no Parque dos Poderes, corta toda a extensão do parque até formar um lago que possui uma pequena ilha e, no lado oposto, píers de observação. As pistas de caminhada acompanham o entorno do lago e cruzam as águas do córrego Prosa, deixando a atividade física mais agradável, especialmente nas épocas mais secas do ano.

Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Parque_das_Na%C3%A7%C3%B5es_Ind%C3%ADge-nas. Acesso em: 01 ago. 2019.

O próximo passo, após a leitura do texto, o professor deverá elaborar uma questão sobre o tema apresentado, de modo que a mesma esteja relacionada com os objetos de conhecimento que se pretende desenvolver.

QUESTÃO MATRIZ: Qual o número aproximado de pessoas que comporta o Parque das Nações Indígenas (na região destacada em vermelho, Imagem 1 abaixo), usando como referência apenas uma imagem aérea?

Imagem 1 - Parque das Nações Indígenas.

Fonte: Adaptado de Google Maps

INTERAÇÃO: Após a apresentação da imagem, é esperado que os estudantes encarem o desafio de determinar a quantidade aproximada de pessoas no espaço demarcado na imagem.

Para isto, cabe ao professor traçar procedimentos de ações que deverão ser seguidas pelos estudantes visando chegar à solução do problema. Por exemplo, o professor poderia questionar os estudantes, formulando a seguinte pergunta:

Quantas pessoas, em média, cabem em um metro quadrado? Neste caso, o professor deve sugerir aos estudantes a construção de um metro quadrado (feito de papelão, por exemplo) em sala de aula e fazer as experimentações necessárias, conforme mostra a Imagem 2.

Imagem 2- Exemplificando uma possibilidade.

Fonte: Própria.

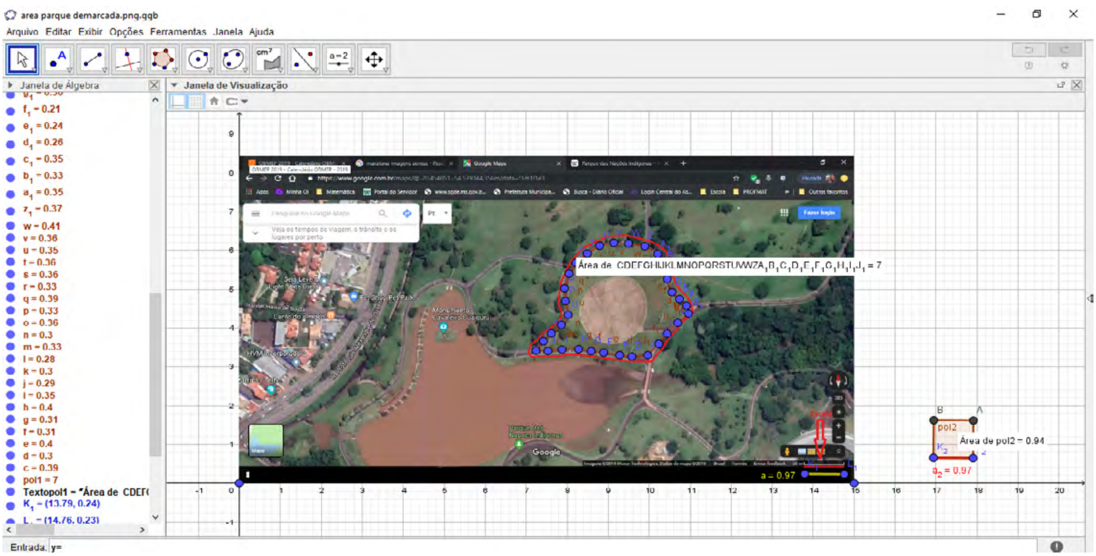
Outra maneira de responder à questão "quantas pessoas cabem em um metro quadrado?", seria sugerir aos estudantes que delimitassem uma certa área no pátio da escola e fizessem uma observação regular de quantos alunos, em média ocupam este espaço (na hora do intervalo, por exemplo, verificar a cada 5 minutos a quantidade de alunos que ocupam este espaço).

Nesta etapa, os estudantes estão utilizando seus conhecimentos de média aritmética, relacionado ao objeto de conhecimento "medidas de tendência central", desenvolvendo, portanto, a habilidade (EF08MA25), isto é, "Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude".

O próximo passo, nesta etapa, é determinar uma aproximação para a área da região destacada na Imagem 1. Para isto, o professor sugerirá aos estudantes que utilizem o software Geogebra (ou outro software equivalente) para apoiar esta fase do processo de modelagem. Neste caso, o professor deve dominar a utilização deste software. Em particular, seria importante que o professor utilizasse o software para treinar os alunos no cálculo de áreas de polígonos não necessariamente regulares. Isto porque o professor deverá inserir a imagem região de interesse no software e orientar os estudantes em como aproximar a área daquela região por meio polígonos irregulares. A partir deste momento, uma vez os estudantes tenham compreendido o uso do software na determinação de uma área qualquer, passa-se para próxima etapa, que é a matematização.

MATEMATIZAÇÃO: Uma vez determinada uma aproximação para a área da região em questão, os estudantes precisam converter esta área aproximada para a escala mostrada na Figura 3, a seguir.

Figura 3- Parque das Nações Indígenas com a área demarca por um polígono.



Fonte: Do autor.

Na Figura 3, podemos observar a existência de uma escala na parte inferir direita que corresponde a 50 metros. No Geogebra, esta mesma distância corresponde a um segmento de 0,97 unidades. Inicialmente, construímos um quadrado de lado 0,97 unidades e associamos este quadrado a um quadrado de lado 50 metros. A área do quadrado de lado 0,97 unidades equivale a 0,94 unidades quadradas e consequentemente em termos reais esta área corresponde a $x = 2500$ m^2. De acordo com o Geogebra a área aproximada da região, por meio de polígonos irregulares, é de 7 unidades quadradas. Assim, para descobrir quantas vezes o quadrado de lado 0,97 unidades cabe dentro da região procurada, basta dividir a área de 7 unidades por 0,94. Assim, o quadrado menor cabe $u = 7{,}44$ vezes na região procurada. Fazendo as conversões vemos que a área procurada é u multiplicado por x, obtendo 18.600 m^2.

Observação 1: O professor deverá conduzir este trabalho de modo que os estudantes consigam desenvolver corretamente os passos relatados acima para chegar no modelo matemático.

Observação 2: Nesta etapa, os estudantes estão utilizando seus conhecimentos da unidade temática grandezas e medidas, relacionado ao objeto de conhecimento áreas de figuras planas, desenvolvendo, portanto, a habilidade (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de áreas de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos. Neste caso, os estudantes também estão utilizando conhecimentos da unidade temática álgebra, relacionada ao objeto de conhecimento razão entre grandezas de espécies diferentes, desenvolvendo a habilidade de (EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferente, como velocidade e densidade demográfica.

MODELO MATEMÁTICO: A partir da matematização, vemos que a solução para o problema proposto recai na multiplicação de uma certa quantidade (número de unidades quadradas) por uma área. Portanto, obtemos que a área procurada é

$$u.x = 7{,}44(2500)=18600 \text{ m}^2.$$

Retomando a questão matriz proposta inicialmente, isto é, "Qual o número aproximado de pessoas que comporta o Parque das Nações Indígenas (na região destacada em vermelho, na Imagem 1), usando como referência apenas uma imagem aérea?", para respondê-la, vamos supor que q seja a quantidade média de pessoas por metro quadrado. Então, o modelo matemático para este problema seria dado por n =

$$n = (u.x)8q,$$

em que n é o número aproximado de pessoas.

Se considerarmos que $q = 4$ pessoas por metro quadrado é uma estimativa razoável, então no espaço demarcado na Imagem 1, caberiam aproximadamente, 74.400 pessoas.

APRESENTAÇÃO: Para finalizar este processo é de suma importância que os estudantes façam uma apresentação de todo os procedimentos utilizados para solucionar a questão matriz, proposta inicialmente, podendo apresentar para outras turmas de sua escola e até em alguma feira que a escola participe.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de ensino apresentada não se limita apenas a um ano escolar. Ela pode ser adaptada a qualquer ano escolar do ensino básico. Em nosso modelo, estamos supondo que os estudantes já possuem algum pré-requisito para enfrentar a situação proposta. Entretanto, com algumas modificações, é possível utilizar o mesmo procedimento e a mesma estratégia de ensino para ensinar algum conteúdo novo. Como historicamente a prática deve levar à perfeição, espera-se que com a utilização frequente do processo de modelagem, as unidades temáticas possam ser trabalhadas com mais facilidade e em um contexto significativo para os estudantes, de modo que seja possível desenvolver nos mesmos as habilidades e os objetos de conhecimento previstos na BNCC.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati,** n. 4, p. 73-80, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BIEMBENGUT, M. S. **Qualidade de Ensino de Matemática na Engenharia:** uma proposta metodológica e curricular. 1997. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas) – UFESC, Florianópolis, SC, 1997.

BNCC, **BANCO NACIONAL CURRICULAR COMUM**, Ministério da Educação (MEC), Brasil, 2017.

BIEMBENGUT, M. S. **Qualidade de Ensino de Matemática na Engenharia:** uma proposta metodológica e curricular. Florianópolis: UFESC, 1997. Tese de Doutorado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2019.

BURAK, D**.** Uma perspectiva de Modelagem Matemática para o ensino e a aprendizagem da Matemática. *In:* BRANDT, C. F., BURAK, D., and KLÜBER, T. E. (org.). **Modelagem Matemática:** perspectivas, experiências, reflexões e teorizações. 2. ed. rev. ampl. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016.

BURGHES, D. N.; BORRIE, M. S. **Modelling with Differencial Equations**. (Ellis Horwood series in mathematics and its applications). Johns Wiley & Sons, New York, Chichester, Bristane, Toronto, 1981.

BRAGA, R. G. M. S. **Formação de professores para a Educação Básica**. Disponível em: <http://www.ipae.com.br/pub/pt/re/ae/91/materia2.htm>. Acesso em 24 jan. 2019.

D'AMBROSIO, U. Educação Matemática: da teoria a prática. Campinas: Papirus, 1996.

D'AMBRÓSIO, U. Desafios da Educação Matemática no novo milênio. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 11, p. 14-17 2001.

DEMAILLY, L. C. Modelos de formação continuada e estratégias de mudança. *In:* NÓVOA, A. (org.). **Os professores e a sua formação**. 2. ed. Lisboa: Dom Quixote, 1992

DEMO, P. **Vítima de Aula: Algumas razões por que não se aprende na escola brasileira.** Governo do Estado de Mato Grosso do Sul, 2017.

FERREIRA, J. S.; SANTOS, J. H. Modelos de formação continuada de professores: transitando entre o tradicional e o inovador nos macrocampos das práticas formativas. Revista cad. Pes., São Luís, v. 23, n. 3, set./dez. 2016.

GIRALDO, V. **Formação de professores de Matemática da Perspectiva dos Saberes Profissionais Docentes**. UFAL, 04 nov. 2017. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=u2zBxs23DGY. Acesso em: 27 maio 2019.

MURRAY, D. Could King Kong Exist? *In:* GOULD, H.; MURRAY, D. and SANFRATELLO, A. (org.). **Mathematical Modeling. Handbook.** Teacher College Columbia University, COMAP, 2012

NACARATO, A.; PIRES, C. C.; ROQUE, T. **Formação de Professores de Matemática: Teoria e Prática Docente.** SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: https://www.sbm.org.br/licmat. Acesso em: 02 jun. 2019.

PACHECO, J. A.; FLORES, M. A. **Formação e avaliação de professores**. Porto: Porto Editora, 1999.

RIBEIRO, F. D. **Jogos e modelagem na educação matemática**. Curitiba: Editora Ibpex, 2007.

SANDES J. P.; MOREIRA G. E. **Educação matemática e a formação de professores para uma prática docente significativa.** Revista @mbienteeducação. São Paulo, Universidade da Cidade de São Paulo, v. 11, n. 1, p. 99-109, jan./abr. 2018.

SANTOS, M. X. **A formação em serviço no PNAIC de professores que ensinam Matemática e construções de práxis pedagógicas.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

VIANA, M. Ensino de matemática no Brasil é catastrófico. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/ciencia/2016/01/1734373-ensino-de-matematica-no-brasil-e-catastrofico-diz-novo-diretor-do-impa.shtml. Acesso em: 28/01/2019.

SOBRE OS AUTORES

Daniela da Rosa Teza

É mestre em Educação Em Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Paraná (2018); especialista em Metodologia do Ensino de Matemática e Física pela Uninter (2017) e, licenciada em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (2016). Atualmente leciona para alunos dos anos finais do ensino fundamental.

Edson RodriguesCarvalho

Possui graduação em Matemática pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Rio Claro (atualmente, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho) (1969-1972), Mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (1987), Doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade Estadual de Campinas (1995) e Pós-Doutorado pelo Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP. Atualmente é professor titular da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, tendo ministrado as seguintes disciplinas na graduação: Cálculo I, Cálculo II, Métodos Numéricos, Matemática I, Matemática II. Na pós-graduação (PROFMAT/UFMS), tem ministrado as disciplinas: Resolução de Problemas, Cálculo Numérico eModelagem Matemática. Também atua na área de Ensino de Matemática, principalmente com as seguintes linhas de pesquisa: ensino e aprendizagem, formação inicial, formação continuada de professores, modelagem matemática e resolução de problemas.Tem experiência na área de Matemática Aplicada, com ênfase em Análise Numérica, atuando principalmente nas seguintes áreas: Métodos Computacionais em Mecânica do Contínuo, Métodos Numéricos em Equações Integro-Diferenciais Aplicados à Mecânica de Meios Contínuos, Transformadas de Radon e Fourier, Análise Numérica e Sociolinguística e Dialetologia. Avaliador Institucional e de Curso de Graduação do SINAES/INEP/MEC.

Eduardo Francisco de Oliveira

Possui graduação em Matemática pelo Centro Universitário de Jales (2007)e está concluindo seu mestrado profissional (PROFMAT/UFMS) com área de atuação em Modelagem Matemática. Atualmente é professordo ensino médio, lotado na SED/CG/

MS, atuando na Escola Estadual Waldemir Barros da Silva.Tem atuado nas seguintes linhas de pesquisa: formação continuada de professores de Matemática do ensino básico e Modelagem Matemática.

Lilian Milena Ramos Carvalho

Possui graduação em Licenciatura Plena Em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (1998), mestrado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2001) e doutorado em Ciências da Computação e Matemática Computacional pela Universidade de São Paulo (2005), com área de atuação em Otimização. Atualmente é professora associada da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, tendo ministrado as seguintes disciplinas na graduação: Cálculo I, Cálculo II, Cálculo III e Pesquisa Operacional. Na pós graduação (PROFMAT/UFMS), tem ministrado as disciplinas: Resolução de Problemas, Fundamentos de Cálculo e Modelagem Matemática. Tem experiência na área de Engenharia de Produção, com ênfase em Pesquisa Operacional, e atuando principalmente na seguinte linha de pesquisa: métodos de pontos interiores. Também atua na área de Ensino de Matemática, principalmente com as seguintes linhas de pesquisa: ensino e aprendizagem, formação inicial, formação continuada de professores, modelagem matemática e resolução de problemas.

Luciane de Castro Quintiliano

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2000). Mestre em Educação, na área de concentração Educação Matemática (2005) pela Universidade Estadual de Campinas. Concluiu Doutorado em Educação na área de concentração Psicologia, Desenvolvimento Humano e Educação pela Universidade Estadual de Campinas (2011). Membro do grupo de pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (PSIEM), da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), desde 2001. Pós-Doutora em Psicologia da Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da UNESP, campus Bauru. Professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul de Minas, campus Avançado Três Corações. Coordenadora do Curso de Pós-Graduação Lato Sensu em Ensino de Ciências Naturais e Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Avançado de Três Corações/MG. Membro do Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (GPPEM), da Unesp, campus Bauru, onde realizou pós doutoramento na área. Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em Psicologia da Educação Matemática, principalmente, nos seguintes temas: conhecimento declarativo e de procedimento, solução de problemas, formação de conceitos, estilos cognitivos, estratégias de solução de problemas e formação de professores. É vice-líder do grupo de pesquisa Grupo Colaborativo em Educação Matemática e Científica certificado pelo CNPQ, desde 2014.

Marcelo Carlos de Proença

Licenciado em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – FC/UNESP – campus Bauru-SP. É mestre (2008) e Doutor (2012) pelo Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência, área de Ensino de Ciências e Matemática, ambos pela mesma instituição. Atualmente, é professor adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM), campus sede de Maringá-PR, e professor do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da UEM. Atua no curso de Pedagogia nas disciplinas de Metodologia de Ensino de Matemática e no curso de Licenciatura em Matemática nas disciplinas de Teoria e Prática Pedagógica I e II e no Estágio Curricular Supervisionado I, II, III e IV. No campo da pesquisa, é líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GEPEM e atua nos seguintes temas: resolução de problemas no ensino e na aprendizagem de Matemática, formação de professores que ensinam Matemática, formação de conceitos geométricos.

Maria Lucia Panossian

É bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, licenciada em Pedagogia pela Universidade de São Paulo, mestre e doutora em Educação na área de Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade de São Paulo. Professora do Departamento Acadêmico de Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) atuando principalmente nas disciplinas Didática da Matemática e Estágio Supervisionado. Integrante do corpo docente do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática

(PPGECM) da UFPR e do Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET) da UTFPR- Curitiba. Tem experiência na área de ensino, tendo atuado como professora do ensino fundamental e médio por mais de 20 anos. É pesquisadora do Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Atividade Pedagógica (GEPAPe/USP), vice-coordenadora do Grupo de Estudos e Pesquisas em Formação de Professores (GEForProf/UTFPR), atuando principalmente nos temas: ensino de conceitos matemáticos, atividade orientadora de ensino e formação de professores.

Mariana Moran

Graduada em Matemática Licenciatura, Mestre e Doutora em Educação Matemática, pela Universidade Estadual de Maringá. Atualmente é professora adjunta do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, e professora do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná/Campus de Campo Mourão. Líder do GPEG – Grupo de Pesquisas em Ensino de Geometria, realiza pesquisas na área da Didática da Matemática aplicada à Geometria e é membro fundador do GT14 de Didática da Matemática. Ministra disciplinas voltadas para a formação de professores, como Estágio Supervisionado e Teoria e Prática Pedagógica. Faz parte do corpo editorial da Revista Paranaense em Educação Matemática e atualmente é Primeira Secretária da Sociedade Brasileira de Educação Matemática regional Paraná (SBEM/PR).

Nelson Antonio Pirola

Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (1991), mestrado em Educação (área de Concentração em Psicologia Educacional) pela Universidade Estadual de Campinas (1995) e doutorado em Educação (área de Concentração em Educação Matemática), pela Universidade Estadual de Campinas (2000). Possui livre-docência em Educação Matemática pela UNESP. Atualmente é professor associado do Departamento de Educação da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Formação de Conceitos e Solução de Problemas, atuando principalmente nos seguintes temas: educação matemática, formação de professores, solução de problemas, educação continuada e ensino e avaliação em matemática. Foi diretor da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional São Paulo - Triênio 2008-2010 e 2011-2013. Foi coordenador do curso de Pedagogia PARFOR (UNESP/CAPES) de 2011-2014. Docente credenciado no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e no Programa de Mestrado Profissional em Docência para a Educação Básica da UNESP - Bauru. Realizou estágios de Pós-Doutorado de curta duração na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, Portugal e na Université Claude Bernard Lyon 1. École Supérieure du Professorat et de l Éducation de l Académie de Lyon. É líder do Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática e coordenador do Centro de Educação Continuada em Educação Matemática, Científica e Ambiental da UNESP de Bauru - CECEMCA. Atualmente, é vice-coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da UNESP/Bauru. Professor colaborador no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática - REAMEC.

Richael Silva Caetano

Possui habilitação – em nível médio – para atuação na Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental pelo Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério (CEFAM – Bauru) e graduação em Licenciatura Plena em Matemática (2006) pela UNESP/campus Bauru (SP). É Mestre (2009) e Doutor (2019) em Educação para a Ciência, na área de concentração em Ensino de Ciências e Matemática, ambos pela UNESP/campus Bauru (SP). Atuou, durante o período de 5 anos, como Professor Efetivo de Educação Básica I (anos iniciais do Ensino Fundamental), pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, em uma escola situada na cidade de Bauru. No Ensino Superior, atuou na UNESP/campus Bauru, durante o período de 4 anos, como professor substituto e bolsista didático (em cursos de graduação em Licenciatura Plena em Pedagogia e Matemática e no Bacharelado em Ciências da Computação) ministrando disciplinas de Educação Matemática e Metodologia da Pesquisa Científica. Atuou, também, como Orientador Educacional de Matemática – durante o período de um ano – em uma empresa de Educação e Tecnologia situada na cidade de Bauru. Nesta empresa, foi responsável: a) pela elaboração de material didático-metodológico visando ao ensino de conteúdos matemáticos na Educação Básica; b) pela Formação Continuada de professores no que tange à utilização da tecnologia no ensino e na gestão escolar. Atuou como coordenador e coautor da área disciplinar de Matemática quando da elaboração do Currículo Comum da rede de ensino da cidade de Bauru. Atualmente é Professor Adjunto na Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), campus de Foz do Iguaçu (PR), lotado no Centro de Engenharias e Ciências Exatas (CECE) do colegiado do curso de Licenciatura Plena em Matemática. Na área de investigação em Educação (Matemática), interessa-se/desenvolve pesquisas nos seguintes temas: a) Formação Inicial e Continuada do professor que ensina Matemática; b) Didática da Matemática; c) Psicologia da Educação Matemática; d) Epistemologia Genética; e) Teoria dos Campos Conceituais.

Roseli Regina Fernandes Santana

Possui Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação Educação para Ciência, da Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Bauru (2019). Graduada em Matemática pelo Centro Universitário de Jales (2003) e em Pedagogia pela Universidade Iguaçu (2005). Cursou o Ensino Médio no Centro Especializado de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério (CEFAM), em Jales, concluído em 2000. Foi titular de cargo como professor de Educação Básica I (2006 - 2012) e hoje atua como professora titular de Educação Básica II, na disciplina de Matemática, na Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Além disso, coordena uma escola da Educação Infantil ao 5º ano do Ensino Fundamental na rede particular de ensino. É membro dos grupos de pesquisa GCEM (IFSP/Birigui - SP) e GPPEM (UNESP/Bauru - SP). Dedica-se ao estudo e pesquisa em Psicologia da Educação Matemática, formação de professores e o ensino da Álgebra nos anos iniciais, com ênfase nos aspectos cognitivos e afetivos das aprendizagens matemáticas de alunos e professores.

Valdete dos Santos Coqueiro

Graduada em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá, com Especialização em Educação Matemática pela Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão e Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia pela Universidade Federal do Paraná. Atualmente é professora Assistente do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná/Campus de Campo Mourão, desde 2008, onde desenvolve projetos de pesquisa e extensão relacionados ao Laboratório de Ensino de Matemática. É membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática de Campo Mourão (GEPEMCAM).

Wilian Barbosa Travassos

Possui Licenciatura Plena de Matemática pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) - Campus Campo Mourão (PR). É Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Doutorando do programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM). Desenvolve trabalhos na área de Educação Matemática, especificamente no campo da álgebra, com ênfase na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Atuou como professor celetista da Universidade Federal do Paraná (UFPR) - campus avançado de Jandaia do Sul, e como professor colaborador do Centro Universitário Cesumar.