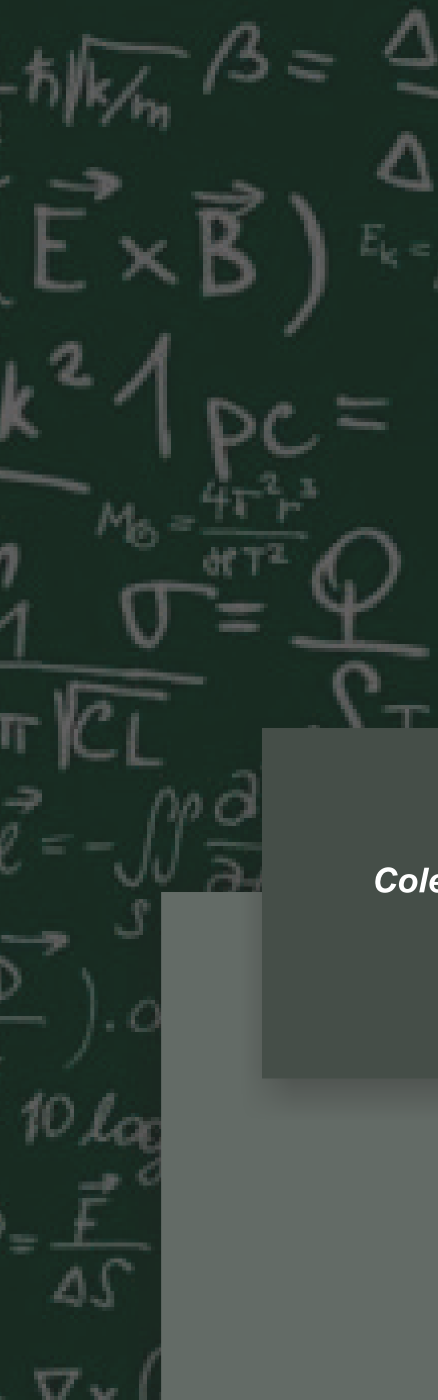


Pesquisas em educação matemática: implicações para o ensino

Talita Secorun dos Santos
Fábio Alexandre Borges
(organizadores)

Coleção Diversidades do Conhecimento

Pesquisas em educação matemática: implicações para o ensino

Talita Secorun dos Santos
Fábio Alexandre Borges
(organizadores)

Coleção Diversidades do Conhecimento

Ficha de identificação da obra elaborada pela Biblioteca
UNESPAR/Câmpus de Campo Mourão

P474

Pesquisa em educação matemática: implicações para o ensino Talita Secorun dos Santos; Fábio Alexandre Borges (orgs.). Campo Mourão: Fecilcam, 2016, 322p – (Coleção Diversidades do Conhecimento)

ISBN: 978-85-88753-41-9

1.Matemática-Estudo e Ensino. 2. Formação de Professores. I. SANTOS, Talita Secorun dos. II. BORGES, Fábio Alexandre. III. Unespar/ Câmpus de Campo Mourão. IV. Título.

CDD 21.ed. 510.7
370.71

Apresentação da Coleção *Diversidades do Conhecimento*

A Universidade Estadual do Paraná – Unespar foi credenciada em dezembro de 2013, e possui como um de seus desafios a verticalização da pesquisa e a criação e fortalecimento de Programas de Pós-Graduação *Stricto Sensu*. Conta atualmente com quatro Cursos de Mestrado, tendo sido aprovados pela CAPES entre 2013 e 2016. Como parte da política de apoio à pesquisa na instituição, a Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação – PRPPG tem realizado discussões sobre a importância da pesquisa, da divulgação científica e do estabelecimento de convênios e parcerias junto a outros setores de pesquisa nacionais e internacionais. Tendo em vista essas prioridades, a PRPPG vem também destinando apoio financeiro para seus pesquisadores e grupos de pesquisa, mediante editais de seleção de projetos de pesquisa e publicações científicas.

É neste contexto que está inserida a Coleção *Diversidades do Conhecimento*, já em sua segunda edição, e cuja proposta envolve a publicação de coletâneas nas diversas áreas do conhecimento, trazendo resultados de pesquisas e ensaios teóricos com vistas a divulgar, à comunidade científica, a profissionais e estudantes, conhecimentos produzidos por pesquisadores e grupos de pesquisa vinculados à Unespar. Para esta edição, foram selecionadas quatro coletâneas, vinculadas às áreas de Artes, Cinema, Ensino de Matemática e Interdisciplinar, intituladas respectivamente: “Criação, ensino e produção de conhecimento em artes”; “Olhares: audiovisualidades contemporâneas brasileiras”; “Pesquisas em educação matemática: implicações para o ensino”; “Formação humana: espaços e representações”. De modo geral, as coletâneas são resultado de investigações realizadas pelos pesquisadores no âmbito de seus grupos de pesquisa, algumas delas em colaboração com pesquisadores de outras instituições e apoiadas com recursos de agências de fomento.

A seleção das coletâneas se deu por meio do edital público de *Apoio à publicação de Coletâneas*, que recebeu propostas oriundas dos Programas de Pós-Graduação em funcionamento e dos Grupos de Trabalho que têm atuado para a criação de novos cursos de Mestrado na Unespar. O processo envolveu o trabalho de um Comitê Editorial, nomeado pela PRPPG e composto por pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento. O Comitê foi responsável pela análise técnica das propostas e pela submissão das coletâneas a pareceristas ad hoc, os quais contribuíram na avaliação do mérito dos manuscritos.

Para finalizar, em sintonia com as políticas nacionais de apoio à pesquisa e Pós-Graduação no Brasil, esperamos que as publicações possam contribuir para o processo de consolidação de nossa Universidade, bem como para a promoção de novos debates nas diversas áreas do conhecimento.

Junho de 2016.

Frank Antonio Mezzomo
Cristina Satiê de Oliveira Pátaro

Sumário

Apresentação

Para apresentar esta coletânea, gostaríamos de enfocar dois importantes contextos de discussões para a sua elaboração: um deles se trata do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática de Campo Mourão (GEPEMCAM), vinculado ao Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná, Câmpus de Campo Mourão; o outro, o grupo de trabalho para a proposta de criação de um mestrado em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná. Nos dois casos, temos ambientes que se constituíram como esferas de grande importância para a aproximação entre os autores. Justificamos contextualizar as pesquisas que compõem este livro por essas duas vias pelo fato de que vários dos participantes desta coletânea integram os dois ambientes de discussões.

No caso do primeiro, o GEPEMCAM, este iniciou formalmente suas atividades no ano de 2010, com o objetivo de investigar a formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática, bem como os processos de seu ensino e aprendizagem em todos os níveis de ensino. Dentre as diversas atividades já desenvolvidas pelo grupo, destacamos a criação e manutenção da Revista Paranaense de Educação Matemática, um periódico online e aberto para consulta de todos os interessados. O GEPEMCAM conta com a participação de docentes de diferentes instituições de Ensino Superior, estudantes de graduação, docentes da Educação Básica e pesquisadores externos convidados.

Já o grupo de trabalho para a criação de um mestrado em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná (Unespar) foi instituído no ano de 2013, por meio do incentivo da Pró-Reitoria de

Pesquisa e Pós-Graduação da mesma instituição. A ideia da proposta de mestrado, em fase de elaboração, justifica-se pela necessidade de se repensar a formação docente inicial e continuada para o ensino de matemática, o que exige, a nosso ver, maior número de pessoas que se preocupem com o ensino e a aprendizagem dessa disciplina, principalmente quando estamos nos referindo a cursos de licenciatura. Nesse sentido, a formação em nível de mestrado de um número maior de professores se faz importante, sejam eles atuantes em qualquer nível de escolarização. Além disso, acreditamos na relevância da proposta também pela grande concentração proporcional de pesquisadores em Educação Matemática que constituem o quadro docente dos Colegiados de Matemática nos campi que compõem a Unespar. Atualmente, este grupo de trabalho está composto por 15 docentes, sendo que 11 deles aceitaram o desafio coletivo de contribuir com a escrita desta obra.

Em outubro de 2015, em uma das reuniões do grupo de trabalho durante o V Seminário de Pesquisa e Pós-Graduação da Unespar, ficaram definidas as duas linhas de pesquisa que comporiam a proposta inicial de mestrado: Práticas Educativas em Matemática e Formação de Professores para o Ensino de Matemática. A definição dessas linhas se deu, principalmente, pela adequação dos interesses de pesquisa dos docentes que compõem a proposta. Nesse sentido, consideramos justo, como organizadores, dividirmos esta coletânea em duas partes, de acordo com as linhas de pesquisa já mencionadas. Evidentemente, os trabalhos não são facilmente traduzidos nessas linhas por acabarem discutindo fatores que transitam em ambas. Em todo caso, os objetivos de cada um dos textos acabam, sim, por se aproximar mais ou menos de uma delas.

Além da Universidade Estadual do Paraná, temos autores que atuam em outras instituições, visto que estes textos, na maioria dos casos, originaram-se de pesquisas de mestrado ou doutorado, contando com o envolvimento direto de seus orientadores. Entendemos como importante destacar então as instituições envolvidas neste livro, quais sejam: Universidade Estadual do Paraná (nos Câmpus de Apucarana, Campo Mourão e União da Vitória); Universidade Estadual de Maringá; Universidade Estadual de Londrina e Universidade Federal de São Carlos.

Dentre as pretensões iniciais para reunirmos os textos neste livro, e pensando nas convergências de ideias necessárias para justificar sua publicação coletiva, decidimos que todos os autores deveriam, em suas considerações finais, apresentar possíveis implicações para o ensino de matemática. Tentamos, com isso, promover o diálogo entre a pesquisa em Educação Matemática e a prática de sala de aula, por acreditarmos que ambas não se justificam de maneira isolada, mas devem coexistir. Queremos dialogar cada vez mais com docentes da Educação Básica, entendendo estes sujeitos como parceiros fundamentais na melhoria da qualidade do ensino de matemática.

Com a expectativa de que possamos contribuir um pouco mais com este diálogo, desejamos a todos uma boa leitura!

Junho de 2016

Talita Secorun dos Santos e
Fábio Alexandre Borges
Organizadores

Prefácio

O interesse pelo ensino e a aprendizagem da Matemática já estava presente entre os educadores, no Brasil, desde a primeira metade do século XX. As primeiras pesquisas em Educação Matemática no país datam, como relata Fiorentini (1994) em sua tese de doutorado, da primeira metade desse século. Os pesquisadores, em sua maioria pedagogos e psicólogos e não professores de Matemática, mostravam-se interessados no ensino e aprendizagem dessa disciplina no contexto da escola primária.

Nas décadas de 1970 e 1980, conforme o autor citado, pesquisas acadêmicas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática foram realizadas nos cursos de Pós-Graduação em Educação, Matemática e Psicologia. Foi também nesse período que funcionou um Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática realizado no IMECC/Unicamp em convênio com a OEA/MEC/PREMEM, o qual, durante o período de seu funcionamento (1975 a 1984), proporcionou a acolhida a quatro turmas de educadores de diferentes países da América Latina. Dele resultou a produção de 28 dissertações especificamente na área da Educação Matemática – termo este introduzido então no Brasil (FIORENTINI, 1994) – que focalizavam majoritariamente a formação inicial e continuada de professores, em especial cursos de treinamento de professores e projetos de melhoria da pratica pedagógica em Matemática.

Na década de 1980, com o objetivo de formar docentes e pesquisadores por meio da pesquisa sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, foram criados dois programas de Mestrado especificamente em Educação Matemática, um no estado de São Paulo, na UNESP – Rio Claro, e outro, no Rio de Janeiro, na Universidade

Santa Úrsula.

A partir de então, o número de programas de mestrado e doutorado em Educação Matemática, existentes de *per se* ou inseridos em programas de Ensino de Ciências e Matemática ou de Educação, tem crescido substancialmente, com uma produção significativa. Tanto mais porque, a partir da criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) em 1988, sucederam-se os Encontros Nacionais de Educação Matemática bem como os Regionais que, em suas sucessivas edições, proporcionaram o ambiente propicio para a divulgação e discussão dos resultados das pesquisas realizadas no âmbito desses programas.

Além desses eventos, um outro, tanto ou mais importante do ponto de vista da pesquisa em Educação Matemática, vem ocorrendo a cada três anos desde o ano 2000: o Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), dedicado exclusivamente ao debate sobre as pesquisas na área e, consequentemente, ao aprofundamento de temas e de metodologias de investigação. Do ponto de vista da divulgação das pesquisas e das discussões, cumpre observar também o número crescente de publicações da área.

As pesquisas

À ampliação de oferta de cursos de pós-graduação em Educação Matemática no Brasil corresponde o aumento da produção acadêmica na área, tanto no sentido da quantidade como também nos focos de interesse.

A compreensão de que a Matemática é uma criação cultural de grupos humanos e não de alguns privilegiados levou à necessidade de investigar a Educação Matemática em suas diferentes dimensões filosófica e epistemológica, histórica e sociocultural.

O afã de compreender as possíveis interferências dessas diferentes dimensões na aprendizagem da Matemática levou os pesquisadores a pesquisar, por exemplo, os currículos de Matemática nos diferentes níveis de ensino.

Um tema que continua presente, desde as pesquisas pioneiras do século, é a prática pedagógica em Matemática, agora vista sob diferentes perspectivas: ensino/aprendizagem dos conteúdos das diferentes áreas da Matemática; obstáculos na aprendizagem da Matemática; utilização de atividades inovadoras/abordagens no ensino (modelagem, uso das tecnologias da informação e comunicação, resolução de problemas e sequências didáticas) para o ensino dos diferentes tópicos abordados em cada um dos níveis da Educação.

O exame da prática docente, por sua vez, introduziu novos campos de pesquisa como a comunicação e argumentação nas aulas de Matemática e o relacionamento dos alunos com a Matemática, a construção colaborativa de conhecimentos em sala de aula e, por certo, a avaliação em Matemática.

Outro tema que tem sido constantemente abordado nas pesquisas é a formação dos professores que ensinam Matemática nos diferentes níveis de ensino e que incluem tanto a formação matemática e didático-pedagógica dos docentes – os saberes docentes – quanto sua formação inicial e continuada e as condições para seu desenvolvimento profissional.

Outras pesquisas têm abordado também as crenças, concepções e ideias de licenciandos e professores sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem, e suas atitudes frente a elas.

Vários pesquisadores, por sua vez, têm se dedicado a investigar não só a História da Matemática e o desenvolvimento dos conceitos matemáticos tendo em vista possibilidades de sua aplicação como ferramenta de ensino, como também a História de Educação Matemática, seus personagens, suas práticas, os currículos, as potencialidades do uso da história da educação matemática na formação do professor de matemática, entre outros.

As pesquisas no campo da Etnomatemática – visão nitidamente social da matemática desenvolvida nos anos 70 pela ação de Ubiratan D'Ambrósio – têm buscado compreender a matemática de diferentes grupos culturais, bem como os conceitos matemáticos informais desenvolvidos pelos educandos fora da conjuntura escolar, na vivência do seu cotidiano.

Nestes últimos anos, principalmente sob a influência dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que reconhecem a importância do ensino de Estatística e Probabilidade desde os anos iniciais, este tema também tem sido objeto de muitas pesquisas.

Recente, também, é a preocupação de vários pesquisadores com a aprendizagem matemática de alunos com necessidades especiais. Muitas pesquisas têm sido realizadas não só para compreender as necessidades específicas desses alunos, como também para desenvolver ações no sentido de superá-las.

Embora esta listagem não dê conta de toda a gama de interesses dos pesquisadores da área da Educação Matemática, ela dá uma ideia da diversidade de temas que têm sido focados nas pesquisas atuais. Além disso, deve-se considerar também a existência de trabalhos que apresentam o inter-relacionamento de temas.

A Educação Matemática neste volume

Os artigos apresentados neste volume enfocam questões identificadas principalmente com dois dos temas aqui elencados: a prática pedagógica em Matemática e a formação de professores que atuam com essa disciplina nos diferentes níveis de ensino. E o fazem a partir de variados enfoques e de diferentes abordagens, nos proporcionando uma visão da complexidade que envolve a área da Educação Matemática e a ação daqueles que nela atuam como professores e/ou pesquisadores.

Na primeira parte do livro, dedicada a discussões sobre a formação de professores para o ensino da Matemática, três dos textos referem-se especificamente à aprendizagem do futuro professor, realizada em cursos de Licenciatura em Matemática, dado o que se espera deles em sua prática docente na escola básica.

O primeiro, “Conhecimento estatístico para o ensino e a formação de professores de matemática”, de Estevam e Cyrino, analisa os processos de interação dialógica de futuros professores de matemática, a partir do modelo Cooperação Investigativa e Alrø e Skovsmose, em aulas da disciplina Metodologia de Ensino de Matemática. O conhecimento estatístico foi escolhido para ser debatido nessas aulas por dois motivos: i) ser necessário para a análise e a interpretação de inúmeras informações e situações com que nos deparamos na vida cotidiana e fazer parte dos temas que devem ser abordados nas aulas de matemática na escola básica, e ii) a experiência dos autores indicar que, na escola, a Estatística e seu ensino reduzem-se a fórmulas, cálculos e representações com fim em si mesmo, em detrimento de processos de análise de dados que evidenciem aspectos conceituais, contextuais e utilitários dessa ciência.

O segundo texto, "Do aprender ao aprender ensinar geometrias: unidade entre o ensino e a aprendizagem", de autoria de Santos e Sousa, discute pesquisa realizada com licenciandos do curso de Matemática que cursavam, na época, disciplinas relativas à Geometria. A pesquisa visava a investigar as possibilidades de uma formação inicial em que os sujeitos em formação pudessem não só se apropriar do conhecimento historicamente produzido sobre esse tema, mas também discutir sobre como ensiná-lo. Fundamentada na perspectiva leontieviana, na formação realizada na pesquisa recorre-se ao conceito de Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como recurso metodológico para a formação proposta.

No texto "Uma experiência na formação do docente em matemática para a utilização pedagógica das tecnologias da informação e comunicação",Cibotto e Oliveira relatam uma experiência realizada com licenciandos de Matemática cuja finalidade era prepará-los para, no futuro, utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) em suas salas de aula nos ensinos Fundamental e Médio. Considerando o lugar da experiência nas práticas formativas, os autores inseriram os licenciandos em uma Experiência Formativa que consistiu em fazê-los: a) refletir sobre essa ação, ou seja, selecionar que tecnologias poderiam ser utilizadas com os alunos, a partir da vivência de suas possibilidades e limitações a partir do uso na prática;

b) efetuar um planejamento detalhado de como utilizar pedagogicamente as TIC antecipando o que poderia ocorrer com sua utilização, e, em seguida, c) usá-las em aulas-piloto, refletindo sobre suas possibilidades no processo de ensino-aprendizagem.

Os outros dois textos dessa primeira parte do livro abordam a formação do professor a partir de outras perspectivas.

Ceolim e Caldeira, no texto "Modelagem matemática na sala de aula da educação básica: obstáculos a serem transpostos", apresentam resultados de pesquisa cujo objetivo era descrever e analisar obstáculos e dificuldades apontadas por professores que, durante seus cursos de Licenciatura em Matemática de instituições públicas do Estado do Paraná, haviam cursado a disciplina de Modelagem na perspectiva da Educação Matemática. Os autores apresentam as categorias que emergiram da análise dos dados - insegurança dos professores em utilizar a Modelagem em suas aulas; formação inicial insuficiente dos professores; dificuldades em aplicar a Modelagem devido à postura tradicional e conservadora do sistema escolar; dificuldades em envolver os estudantes num ambiente de Modelagem. E, ante esses resultados, questionam a formação – inicial e continuada – dos professores que não lhes proporciona a segurança suficiente para encarar uma sala de aula com novos parâmetros de ensino.

Em "Natureza do conhecimento matemático na formação de professores", Lorin e Batista discutem a natureza do conhecimento matemático e sua contribuição para a formação de professores a partir do pressuposto que a História e a Filosofia da Ciência, em especial da Matemática, têm um papel fundamental nessa tarefa. Assumem que a formação científica dos professores deve lhes proporcionar uma visão não distorcida da construção do conhecimento matemático que lhes permita reconhecer visões deformadas da ciência e certas crenças em relação à matemática. Isso para que possam atuar com seus futuros alunos na construção de um significado epistemológico sobre a natureza do conhecimento matemático.

Na segunda parte do livro, dedicada às práticas educativas em matemática, cinco dos artigos tratam do ensino/aprendizagem de temas específicos dessa disciplina abordados na escola básica enquanto o sexto traz a baila um outro campo de pesquisas que expressam as preocupações de educadores e autores: o do processo educativo em matemática com alunos com necessidade especiais.

Neste último, que de fato é o primeiro nessa parte do livro, "A mediação para surdos inclusos nas aulas deMatemática por intérpretes de Libras: uma ação interlínguas?", Borges e Nogueira expõem as dificuldades que alunos surdos enfrentam no interior da sala de aula. Sua inclusão nesse ambiente é prejudicada por nele imperar uma língua que não lhes é acessível tanto na forma oral como na escrita – mais ainda no caso da matemática, que traz para o cotidiano de aula ainda outra linguagem: a matemática. A presença, em sala de aula, de um Intérprete de Língua de Sinais (ILS) parece não resolver a situação e não só devido ao conhecimento matemático quase sempre superficial dele. O fato de esta língua estar ainda em construção e, por isso, não contar ainda com elementos (sinais) que correspondam diretamente a termos matemáticos, faz que na matemática sejam usados termos retirados da língua natural e com significados distintos daqueles usados no cotidiano. Esta foi a situação geradora da pesquisa apresentada no texto e que buscava responder à seguinte questão: como se efetiva a mediação por uma ILS sem formação em Matemática, de aulas desta disciplina, para dois alunos surdos de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental?

Dos outros cinco textos, o primeiro, "Números irracionais no Ensino Fundamental: conhecimentos de alunos e tarefas para as aulas de matemática", de Rezende e Nogueira, apresenta sete tarefas matemáticas elaboradas com a intenção de auxiliar alunos do Ensino Fundamental na compreensão do conceito de número irracional. As tarefas estão associadas a pelo menos uma das ideias base consideradas pelas autoras como necessárias para a construção do conceito de números irracionais nesse nível do ensino. E foram elaboradas de modo que cada uma apresenta um grau maior de complexidade que a anterior para, com isso, ampliar conceitos, representações simbólicas e propriedades nelas envolvidas. No texto são também analisadas respostas de alunos brasileiros concluintes do Ensino Fundamental e de alunos franceses, de nível correspondente, que participaram da pesquisa de doutorado da primeira autora com a finalidade de identificar semelhanças e diferenças nas respostas desses alunos, inseridos em sistemas de ensino e, sobretudo, em culturas diferentes.

No segundo desses cinco textos, "A influência dos registros figurais nos tratamentos e mobilizações de registros em problemas de geometria", Moran e Franco apresentam resultados de uma pesquisa que investigou as influências dos tipos de registros figurais na exploração de alguns conceitos de Geometria em um contexto de resolução de problema. Foi dada particular atenção às transformações – operações e mobilizações de registros – que podem e devem ser realizadas para que o sujeito obtenha sucesso na aprendizagem e, consequentemente, na conclusão do problema. O texto apresenta ainda possibilidades de representações figurais que podem ser utilizadas no ensino e aprendizagem de conteúdos de Geometria. Na pesquisa, realizada com 15 (quinze) professores de Matemática da rede pública de ensino do Paraná, foram utilizados, para a representação de figuras geométricas, materiais manipuláveis, o *software* GeoGebra e Expressões Gráficas, consideradas estas como registros figurais, sistemas de representação que permitem abstrações cognitivas utilizáveis em resolução de problemas ou em reconhecimentos de propriedades geométricas.

Ferreira e Barros, no texto "Algumas influências de objetos ostensivos e não ostensivos na compreensão do plano de Poincaré com o *software* GeoGebra", apresentam resultados de pesquisa que considera trabalhar-se, na realização de uma tarefa matemática, com dois tipos de objetos, os ostensivos (os manipuláveis) e os não-ostensivos (os que não são percebidos pelos nossos sentidos). A pesquisa, realizada com alunos do 4° ano da Licenciatura em Matemática de uma Universidade Estadual do Paraná, tinha por objetivos: a) verificar a possibilidade de aparecimento de conceitos não científicos (equivocados) advindos da manipulação de objetos ostensivos mostrados na tela do computador; b) detectar manifestações de possíveis obstáculos provenientes da constituição de conceitos euclidianos na aprendizagem de uma nova Geometria; e c) verificar se o uso de instrumentos digitais para a representação de situações geométricas facilita a aprendizagem dos conceitos envolvidos.

No texto "Sequências e padrões: uma discussão a partir de produções de significado", Dantas apresenta e discute episódios de sala de aula que retratam momentos em que a atividade dos alunos está centrada na resolução de problemas de enunciados propostos pelo professor, enunciados estes cujo objetivo era que os alunos desenvolvessem a percepção de padrões e de regularidades por meio de um trabalho com sequências. As justificativas dos alunos eram construídas com base na observação, no teste de hipóteses, na experimentação, no compartilhamento e confronto de ideias, um cenário para o qual a utilização do GeoGebra trouxe uma ampliação de possibilidades. Focalizando sua análise na comunicação, na interação que se estabelece entre os agentes envolvidos (alunos e professor) e nas produções de significados ocorridas neste processo e tomando por base o Modelo dos Campos Semânticos, Dantas enuncia sua compreensão sobre a produção de significados na interação que ocorre entre os alunos e entre eles e o professor.

Considerando as Diretrizes Curriculares de Matemática da Educação Básica do Paraná (2008), que apontam a necessidade de articular os diferentes conteúdos dessa disciplina, Basniak e Scaldelai apresentam e discutem, no texto "Uma abordagem de polinômios a partir da representação algébrica com o GeoGebra", uma abordagem do conteúdo operações com monômios e polinômios relacionando-o ao conteúdo geometria, mais especificamente ao de área de retângulos. Nessa abordagem utilizam o GeoGebra para a construção dos objetos de aprendizagem por considerarem que a interação dos alunos com *softwares* dinâmicos de Matemática pode favorecer não só mudanças no ensino da matemática como também possibilitar uma aprendizagem mais ativa pelos alunos.

O compartilhamento destas experiências, tão variadas, presentes neste volume permitirá ao leitor uma maior compreensão dos processos de ensino e aprendizagem da matemática. Cada um desses trabalhos o estimulará à reflexão sobre os diferentes temas apresentados e sobre os esforços que devemos empreender para aprimorar esses processos.

Regina Maria Pavanello

Referências

FIORENTINI, Dario. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática:** o caso da produção científica em cursos de Pós-Graduação. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas/Unicamp, 1994.

Parte 1
Formação de professores para o ensino de matemática

Capítulo 1

Conhecimento estatístico para o ensino e a formação de professores de matemática

Everton José Goldoni Estevam
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

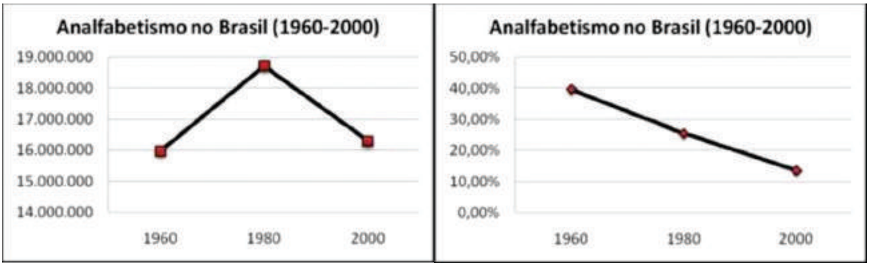
Por falar em Educação Estatística…[1]

No Brasil, assim como em outros países como Espanha, EUA, França, Nova Zelândia e Portugal, a Educação Estatística vem sendo reconhecida como importante campo a ser explorado na educação básica. A justificativa para isso é assente na forte e crescente presença de informações de grande magnitude e de situações que envolvem variabilidade e incerteza, as quais demandam conhecimentos estatísticos e probabilísticos para sua compreensão, análise e interpretação. Embora seja um argumento amplamente aceito, por vezes, não há clareza se as pessoas e, particularmente, os professores que ensinam estatística compreendem seu real significado e suas implicações.

[1] Apoio financeiro das seguintes instituições: Financiamento de Custeio e Capital pela Fundação Araucária, por meio do Programa Universal/Pesquisa Básica e Aplicada e do CNPq, pelo Programa de Professor Visitante Especial, com financiamento relativo a custeio e bolsas.

Acreditamos que “exemplos exemplares”, apesar de, geralmente, não representarem todas as dimensões de uma ideia, podem oferecer elementos importantes para esclarecermos aspectos-chave e problematizar questões complexas a ela relacionadas, cuja conjugação contribui para sua significação. Nesse sentido, recorremos a dados apresentados em Ferraro (2002) e elaboramos uma situação no contexto do analfabetismo, no Brasil, de pessoas com 15 anos ou mais, com o intuito de provocar reflexões acerca da problemática do ensino de estatística a que nos referimos.

Figura 1: Analfabetismo no Brasil no período de 1960 a 2000



(a) (b)

Fonte: Ferraro (2002)

Você acredita que os gráficos (a) e (b) da Figura 1 se referem aos mesmos dados? Você consegue chegar a alguma conclusão a partir deles? Afinal, o analfabetismo cresceu, diminuiu ou não teve variação significativa no país no período analisado?

Parece-nos que a maioria das pessoas (com algum conhecimento sobre representações cartesianas de processos variáveis) seria capaz de reconhecer que o Gráfico (a) sugere um aumento no analfabetismo entre 1960 e 1980, sucedido por uma diminuição, nos 20 anos seguintes, de semelhante magnitude, o que resulta em situações parecidas no ano 2000 e na década de 1960. Do mesmo modo, é possível perceber que o Gráfico (b) aponta uma queda contínua no analfabetismo no Brasil entre os anos de 1960 e 2000. Assim, cada gráfico parece representar situações distintas e sugere diferentes conclusões.

Contudo, é preciso perceber que, enquanto o Gráfico (a) apresenta dados absolutos – quantidade de pessoas analfabetas no país em cada um dos anos analisados –, o Gráfico (b) apresenta dados relativos – porcentagem de analfabetos em cada um dos anos analisados. Isso implica em particularidades referentes à análise de ambos. O Gráfico (a), apoiado em dados absolutos, só faria sentido para uma análise da variação do analfabetismo no país no período se a população não tivesse sofrido alteração ao longo dos anos. Do mesmo modo, é preciso esclarecer a população considerada na determinação dos percentuais apresentados no Gráfico (b) (a do ano de 1960, do ano 2000 ou as respectivas populações em cada um dos anos analisados). Portanto, nenhum dos dois gráficos possibilita uma análise consistente, sem que tenhamos acesso a outras informações relacionadas à coleta e organização desses dados, as quais estão presentes na Tabela 1.

Tabela 1: Analfabetismo no Brasil no período de 1960 a 2000

Analfabetismo no Brasil			
Ano	**Analfabetos**	**População**	**%**
1960	15.964.852	40.278.602	39,6%
1980	18.716.847	73.542.003	25,5%
2000	16.294.889	119.533.048	13,6%

Fonte: Ferraro (2002)

Com base na Tabela 1, é possível, então, perceber que, apesar de a quantidade de analfabetos no Brasil ser semelhante nos anos de 1960 e 2000, a população do país no ano 2000 é praticamente o triplo daquela de 1960. Por outro lado, notamos que os percentuais apresentados no Gráfico (b) consideram a população nos respectivos anos. Assim, com base no reconhecimento das características dos diferentes registros, é possível concluir que, embora a quantidade de analfabetos seja semelhante nos anos inicial e final da análise, o índice de analfabetismo foi reduzido em praticamente 2/3 entre a década de 1960 e o ano 2000.

No entanto uma análise como essa exige algum nível de literacia estatística, que remete à capacidade de compreender, interpretar e argumentar sobre situações de análise de dados (WATSON, 1997) e, para tanto, implica pensar sobre os dados necessários a essa análise, o processo de passagem de dados brutos para tabelas de frequência e gráficos (transnumeração), a onipresença da variação, os conhecimentos estatísticos em causa e sua relação com o contexto da situação (WILD; PFANNKUCH, 1999).

Assim, nossa intenção, ao iniciar esse texto discutindo um exemplo, é provocar o leitor, e especialmente o professor-leitor, a refletir se a Educação Estatística que vem sendo desenvolvida na educação básica oferece condições para uma análise nas dimensões apresentadas. Isso porque, infelizmente, nossa experiência parece mostrar que não (ESTEVAM, 2013; ESTEVAM; CYRINO, 2014), já que, por vezes, a Estatística e seu ensino reduzem-se a um amontoado de fórmulas, cálculos e representações com fim em si mesmo, em detrimento de processos de análise de dados que evidenciem aspectos conceituais, contextuais e utilitários dessa ciência.

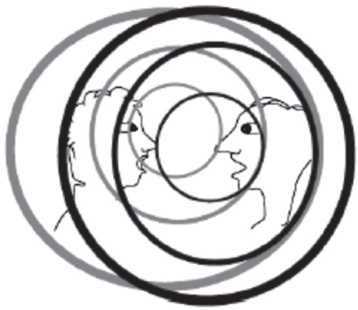
Salientamos, no entanto, que não sugestionamos culpabilizar os professores por essa realidade, pelo contrário, acreditamos que eles são tão vítimas quanto seus alunos. Muitos não tiveram formação no campo da Estatística e os que tiveram evidenciam experiências pouco promissoras para os intuitos educacionais supracitados (ESTEVAM; CYRINO, 2014). Portanto, nosso objetivo aqui incide em, a partir do reconhecimento da necessidade de redimensionamento das práticas didático-pedagógicas predominantes nas salas de aula da educação básica, refletir sobre possibilidades formativas para desenvolvimento de conhecimentos estatísticos que ofereçam condições para que o professor vislumbre a Educação Estatística como dimensão de domínio na/para sua prática.

Desde os trabalhos de Shulman (1986, 1987), é amplamente reconhecido que o conhecimento de conteúdo exigido do professor é distinto daquele necessário a outras áreas. Esse é um dos fundamentos das pesquisas do grupo de Débora Ball, que tem se empenhado em discussões sobre o que denominam "conhecimento matemático para ensinar". Segundo Ball, Thames, Phelps (2008, p. 395), trata-se do "conhecimento matemático necessário para realizar efetivamente o trabalho de ensinar Matemática aos alunos". Embora identifiquemos avanços relacionados a esses conhecimentos na álgebra, geometria e aritmética, no campo da estatística muitos ainda são os desafios para esclarecimento desses aspectos (SHAUGNESSY, 2007; BURGUES, 2008; CASEY, 2010; SORTO; WHITE, 2010).

Tais desafios acentuam-se quando consideramos os avanços curriculares que apontam "mudanças" no papel do professor em meio ao processo didático e a urgência de práticas pedagógicas com objetivos de aprendizagem mais exigentes, que provoquem os alunos para a realização de tarefas desafiantes e os incitem a comunicar, questionar, refletir, negociar e colaborar em sala de aula (CHAPMAN; HEATER, 2010), especialmente no campo da Educação Estatística. Um dos aspectos que os permeia reside na necessidade de o professor saber lidar com e interpretar os erros dos alunos, assim como justificar os procedimentos, conceitos e ideias empregados nos processos de resolução.

Nesse sentido, é necessário pensar estratégias de formação com potencial para promover o desenvolvimento desses conhecimentos, tanto no campo estatístico quanto no didático-pedagógico. Acreditamos que o Modelo de Cooperação Investigativa (Modelo-CI), proposto por Alrø e Skovsmose (2010) para apoiar as ações do professor, pode constituir contributos, à medida que assume os pressupostos da educação dialógica e se contrapõe ao paradigma do exercício e ao tratamento uniforme e arbitrário dado ao erro em sala de aula. Nesse sentido, o Modelo-CI apoia as ações do professor e assume os pressupostos do ensino para o diálogo, bem como do ensino por meio do diálogo (WEGERIF, 2010) (Figura 2).

Figura 2: Ensino como espaço de diálogo



Fonte: Wegerif (2010, p. 24)

O ensino é, portanto, dialógico porque mantém diferentes perspectivas em tensão e inevitavelmente essa tensão leva ao desafio e à competição entre ideias, que Wegerif (2010) designa por "pensamento crítico", assim como à geração espontânea de novas ideias e *insights*, denominada de "pensamento criativo".

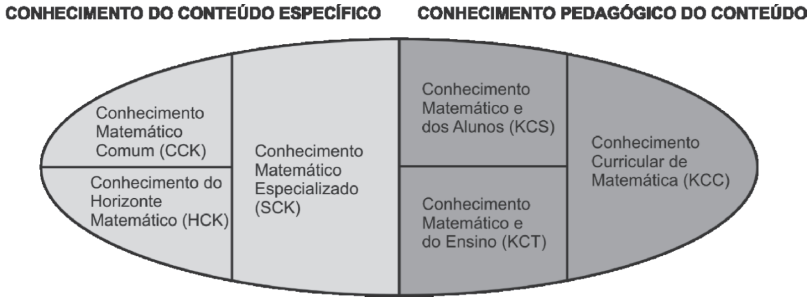
Dessa forma, neste texto, discutimos processos de interações dialógicas de uma experiência com futuros professores, sustentados no Modelo-CI e motivados pela análise de situações didáticas hipotéticas que envolvem os conceitos de média, moda e mediana, como meio para promoção de conhecimento estatístico para o ensino.

O conhecimento estatístico para o ensino

Há alguns anos pesquisadores têm se debruçado em identificar e discutir o conhecimento matemático necessário ao professor de matemática, a partir do reconhecimento de que a prática letiva impõe demandas particulares, quando comparadas às práticas de outros profissionais. Shulman (1986, 1987) foi o precursor dessa discussão ao situar esse conhecimento em dois domínios: conhecimento de conteúdo e conhecimento pedagógico de conteúdo.

Nos últimos anos, Débora Ball e seus colegas têm se dedicado a estudar essas dimensões e, a partir de estudos empíricos, sugerem a divisão dos dois domínios enunciados por Shulman em outros seis subdomínios (Figura 3).

Figura 3: Subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT[2])



Fonte: Adaptado de Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403)

Relaciona-se ao conhecimento de conteúdo: o conhecimento matemático comum (refere-se ao conhecimento disciplinar de matemática comum a professores e outros profissionais), conhecimento matemático especializado (refere-se aos aspectos particulares à prática do professor, como dar sentido e avaliar estratégias não convencionais de resolução) e conhecimento do horizonte matemático (refere-se à consciência do professor sobre os conhecimentos matemáticos prévios e futuros no currículo de matemática e suas articulações).

Nesse sentido, no campo da Educação Estatística podemos conjeturar que o conhecimento matemático comum remete a saber resolver exercícios e problemas, utilizar notações e termos estatísticos corretamente, identificar definições incorretas, assim como respostas incorretas dos exercícios e desenvolver uma atitude de questionamento frente aos dados, o que corresponde à literaciaestatística (WATSON, 1997). Ball, Phelps e Thames (2008) esclarecem que "comum" não está sendo utilizado para sugerir que todos possuem esse conhecimento, mas para explicitar que esse é um tipo de conhecimento utilizado em outras situações que não somente a de ensinar.

[2] As siglas utilizadas aqui e na figura referem-se às expressões em inglês.

O conhecimento matemático especializado é um conhecimento do conteúdo que é específico para o ensino, não sendo necessário para outras atividades ou profissões que não o ensino. Assim, envolve o reconhecimento de padrões nos erros dos alunos (por exemplo, confusão entre média, moda e mediana), análise de modos de generalizar determinadas estratégias não usuais utilizadas pelos alunos (como recorrência a desenhos), responder aos porquês dos alunos (como por que a média não é sempre representativa do conjunto de dados) e avaliar rapidamente se afirmações feitas pelos alunos são pertinentes. Essas tarefas, executadas diariamente pelos professores, demandam compreensão e raciocínio matemáticos únicos. O ensino requer um conhecimento que está além do que está sendo efetivamente ensinado e esse conhecimento é específico do professor porque não é objetivo do ensino de matemática que todo aluno possua esse tipo de conhecimento.

Já no que se refere ao conhecimento pedagógico do conteúdo, este relaciona: o conhecimento do conteúdo e dos alunos (incidente em equívocos comuns dos alunos e conceitos/habilidades que eles consideram difíceis ou fáceis), o conhecimento do conteúdo e do ensino (refere-se a representações e modelos potenciais para serem explorados e modos de sequenciar o ensino) e o conhecimento do conteúdo e do currículo (refere-se ao conhecimento dos programas e sua articulação horizontal e vertical, bem como dos materiais de apoio adequados a determinado tópico).

O conhecimento do conteúdo e dos alunos combina o conhecimento sobre os alunos e o conhecimento do conteúdo. De acordo com Ball, Phelps e Thames (2008), os professores devem ser capazes de antecipar o que é possível que os alunos pensem sobre o que está sendo ensinado e o que poderão considerar confuso, de prever o que os alunos acharão interessante ou motivador, ao escolher um exemplo, assim como prever o que eles serão capazes de fazer com facilidade e com dificuldade ao propor uma atividade. Os professores devem ser capazes de escutar e interpretar o pensamento incompleto que emerge dos alunos, que por vezes é expresso em uma linguagem ainda imprecisa, tendo em conta a complexidade que permeia a linguagem matemática e a estatística. Cada uma dessas habilidades exige uma interação entre compreensão dos conteúdos estatísticos específicos e familiaridade com a maneira de pensar estatisticamente dos alunos (por exemplo, se reconhecem a variabilidade e a incerteza em processos estatísticos de análise de dados ou se pautam no determinismo). Para esses autores, "o conhecimento do conteúdo e dos alunos é um amálgama, envolvendo uma ideia matemática ou um procedimento específico e a familiaridade com o que os alunos normalmente pensam ou fazem" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 401).

O conhecimento do conteúdo e do ensino combina o conhecimento sobre ensinar e conhecimento sobre matemática. Para ensinar um conteúdo específico, os professores usualmente utilizam sequências de ensino, escolhem quais devem ser os exemplos para iniciar o conteúdo e quais são mais propícios para aprofundamento. Eles também avaliam vantagens e desvantagens na utilização de determinadas representações e analisam as contribuições que diferentes métodos e procedimentos proporcionam para a aprendizagem como, por exemplo, a exploração de ciclos investigativos (WILD; PFANNKUCH, 1999) ou a realização de exercícios. Cada uma dessas tarefas requer interação entre compreensão matemática dos conceitos específicos envolvidos e estratégias pedagógicas que influenciam a aprendizagem dos alunos. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), muitas vezes o professor deve tomar decisões relacionadas ao ensino como, por exemplo, quais contribuições dadas pelos alunos devem ser acatadas, quais devem ser ignoradas e quais devem ser guardadas para um momento posterior. Também durante uma exposição, o professor deve decidir qual o momento propício para fazer uma interrupção e dar mais esclarecimentos sobre o assunto, quando utilizar um comentário feito por um estudante para discutir uma questão matemática, ou, ainda, interpor uma pergunta ou uma nova tarefa para os alunos. Todas essas decisões requerem uma integração entre a matemática que está sendo apresentada e os objetivos e as opções de ensino presentes naquele contexto escolar. O conhecimento do conteúdo e do ensino "é um amálgama, envolvendo uma ideia matemática ou procedimento e familiaridade com princípios pedagógicos para o ensino desse conteúdo em particular" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 402)

As dimensões de conhecimento horizontal e curricular, embora importantes, não serão objeto de discussão no presente texto, em virtude da limitação de espaço e do foco sobre a formação inicial de professores de Matemática.

Abordagem dialógica: o Modelo de Cooperação Investigativa (Modelo-CI)

Alrø e Skovsmose (2010) apresentam o Modelo-CI em contraposição ao paradigma do exercício e ao tratamento uniforme e arbitrário dado ao erro em sala de aula, que assume todos os possíveis tipos de erro como erros de verdade. A isso os autores denominam absolutismo da sala de aula e essa perspectiva parece adequar-se ao contexto da estatística, uma vez que os problemas estatísticos nem sempre têm uma solução única e podem ser simplesmente avaliados como totalmente errados ou certos. Os processos de solução devem considerar o raciocínio empregado e a adequação dos métodos utilizados à natureza dos dados existentes (GARFIELD; GAL, 1999).

No paradigma do ensino tradicional, na comunicação entre professor e aluno (assim como entre alunos) predominam o jogo de perguntas, o explicar o jeito certo de fazer e o corrigir erros. Já no Modelo-CI, a aprendizagem constitui uma ação dialógica que visa à mudança/elaboração de uma perspectiva.

> Uma perspectiva reside na dimensão tácita da comunicação, e é desta dimensão que as declarações ganham seu sentido. Uma perspectiva é uma fonte de significados. Sem uma perspectiva, nenhum ato de comunicação seria possível. A

> perspectiva determina aquilo que o participante escolhe ver, ouvir e entender numa conversação, e ela se manifesta através do uso da linguagem, naquilo que escolhemos falar ou não falar e na forma como entendemos uns aos outros (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 29).

As perspectivas dos alunos em uma aula de matemática e, particularmente, de estatística, podem ser consideradas importantes instrumentos para aprendizagem, pois possibilitam ao professor acessar o modo de pensar dos alunos, assim como ao aluno tomar consciência de sua própria maneira de pensar e agir em sala de aula. “O Modelo-CI traz os alunos e suas perspectivas para o centro do palco do processo educativo” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 72).

Nesse enquadramento o professor assume o papel de investigador, pautado em conversações cujo propósito pode ser uma perspectiva, a busca por compreendê-la e chegar a um consenso ou apenas o reconhecimento de perspectivas distintas. Uma perspectiva compartilhada pode ser a mola propulsora da produção de significados.

Cabe salientar que o processo de dialogar compreende três aspectos fundamentais: (i) realizar uma investigação; (ii) correr riscos; e (iii) promover igualdade.

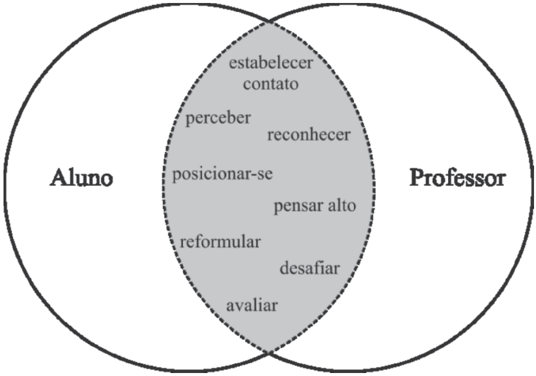
i) realizar uma investigação significa abandonar a comodidade da certeza e deixar-se levar pela curiosidade. O diálogo é uma conversação de investigação (ou inquérito) que constitui uma reflexão conjunta, uma investigação colaborativa ou uma cooperação investigativa. Atos investigativos constituem tentativas de ir além: elaborar, explicar, sugerir, apoiar, avaliar consequências. Expressar uma perspectiva como forma de posicionamento faz parte da concepção de investigação e possibilita a exploração das perspectivas dos participantes, não como transmissão, mas com intuito de torná-las tangíveis na superfície da comunicação. Preconiza também uma disposição para abrir mão de uma perspectiva, que significa estar disposto a analisar o que aconteceria se aqueles pressupostos não fossem mantidos. O professor não deve ter respostas prontas, mas curiosidade sobre o que os alunos fariam, estando disposto a também reconsiderar seus entendimentos e pressupostos. Por fim, explorar perspectivas não se limita a fazer considerações sobre perspectivas já existentes. Pode significar construir novas perspectivas. Assim, o diálogo se torna um processo colaborativo de construção de perspectivas.

ii) correr riscos é fundamental à relação dialógica porque o imprevisto faz parte do diálogo. Implica sair da zona de conforto para atuar numa zona de risco. Isso está intimamente relacionado com a manifestação de novas possibilidades de envolvimento dos alunos, de padrões de comunicação diferentes e, consequentemente, de novas aprendizagens.

iii) promover a igualdade remete ao sentido de que não deve haver demonstração de forças pelos participantes do diálogo, tampouco sujeitar o processo dialógico aos papéis e poderes dos envolvidos. Embora professor e alunos tenham posições diferentes (em termos profissionais e didáticos), eles podem buscar ser igualitários em termos de comunicação e relações interpessoais, o que não implica uniformidade de opiniões e perspectivas.

No desdobramento desses três aspectos estruturantes da compreensão de diálogo, Alrø e Skovsmose (2010) descrevem oito elementos constituintes das relações dialógicas estruturantes do Modelo-CI: estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar (Figura 4).

Figura 4: Modelo de Cooperação Investigativa (Modelo-CI)



Fonte: Alrø e Skovsmose (2010, p. 69)

Uma base do Modelo-CI é o processo de escuta ativa, na qual o ouvinte não absorve de modo passivo as palavras, mas tenta perceber os fatos e os sentimentos contidos naquilo que ouve e ajuda quem as fala a externar seus problemas. Tal processo envolve, portanto, fazer perguntas e dar apoio não verbal, na busca por estabelecer contato entre (possíveis) diferentes perspectivas. Estabelecer contato significa sintonizar um no outro para começar a cooperação. Implica estar presente e prestar atenção no outro, numa relação de respeito mútuo, responsabilidade e confiança. É uma preparação para investigação e uma atitude positiva dos participantes, que envolve o estar aberto à investigação.

Esse contato possibilita a percepção da perspectiva do outro, o que envolve, por exemplo, reconhecer possíveis e diferentes formas de abordagem para uma tarefa, sem uma resposta antecipada. "Perceber significa descobrir alguma coisa da qual nada se sabia ou não se tinha consciência antes" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 106). Nesse sentido, a elaboração e exposição de questões hipotéticas da forma "O que acontece se?"; questões de conferência e confirmação ("Vamos ver se eu entendi; é isso?"); ou questões ampliadoras e esclarecedoras, como "Por quê? Como você pensou isso?", em um cenário investigativo e não apenas em um jogo de questões, contribuem sobremaneira para essa percepção, à medida que proporcionam justificações e aprofundamentos quanto às perspectivas em jogo.

Já reconhecer pressupõe o exame das ideias e perspectivas percebidas para reconhecer a natureza do problema e aprofundar uma investigação. Podemos assumir que isso intenta delinear as ideias estatísticas, o que significa ser capaz de reconhecer um princípio, conceito ou algoritmo que surge do processo conjunto de percepção. Por exemplo, pesquisas mostram uma confiança exagerada sobre algoritmos de medidas de tendência central e uma falta de compreensão conceitual por parte de alunos e professores (JACOBBE; CARVALHO, 2011).

Posicionar-se significa levantar e observar ideias e pontos de vista, não como verdades absolutas, mas como algo que pode ser examinado. A aprendizagem tem seu começo em algum lugar e, portanto, alguma coisa necessita ser conhecida para que um processo de argumentação em favor de ideias – sejam elas minhas ou nossas – seja iniciado a partir, possivelmente, das diferentes perspectivas reveladas. “A fim de clarear uma perspectiva, é importante experimentar várias linhas de argumentação. Isso pressupõe posicionar-se” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 112).

Pensar alto possibilita a socialização das perspectivas que podem ser investigadas. Pode envolver perguntas hipotéticas e desafiantes que servem como convite ao pensar sobre e ter percepção de algo diferente.

> *Pensar alto* significa expressar pensamentos, ideias e sentimentos durante o processo de investigação. Expressar o que se passa dentro de si expõe as perspectivas à investigação coletiva. Algumas *questões hipotéticas* costumam surgir no pensar alto e estimulam a investigação (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 113, grifos do autor).

A reformulação possibilita esclarecer e buscar a compreensão e identificação de um procedimento matemático adequado. “Reformular significa repetir o que já foi dito com palavras ligeiramente diferentes ou com um tom de voz diferente" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 114) para confirmar o que ouviu do outro ou como um convite a uma reflexão mais profunda. Envolve ações de parafrasear, fazer questões de conferência ou completar meias falas. Pode ser compreendida como uma decomposição da ação de estabelecer contato com vistas a manter contato.

Desafiar compreende questões e sentenças de oposição ao que está posto (que podem também ser hipotéticas), que visam a levar as coisas para outra direção ou questionar conhecimentos ou perspectivas já estabelecidas, o que possibilita examinar novas possibilidades e esclarecer perspectivas pouco evidentes. Contudo é preciso cuidar para que os desafios estejam à altura da compreensão do aluno.

Por fim, o ato de avaliar busca um propósito comum e não necessariamente uma perspectiva correta. "Uma avaliação pode assumir muitas formas. Correção de erros, crítica negativa, crítica construtiva, conselho, apoio incondicional, elogio ou novo exame – é uma lista incompleta" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 116). Pode ser feita por terceiros ou pelo próprio indivíduo e busca feedbacks construtivos.

Salientamos que, alinhado aos elementos supracitados, o Modelo-CI assume outros dois princípios para uma investigação: ela não pode constituir uma atividade compulsória, pois pressupõe o compromisso dos participantes a partir de um convite, e deve ser um processo aberto, cujos resultados e conclusões não podem ser determinados de antemão. Tais pressupostos vêm ao encontro daqueles preconizados por educadores estatísticos que advogam que o ensino de estatística deve se aproximar de um modelo científico investigativo exploratório, a partir das componentes Problema, Plano, Dados, Análise e Conclusão (PPDAC) (WILD; PFANNKUCH, 1999).

Contexto e encaminhamento metodológico da experiência que analisamos

Os processos de interação dialógicas de futuros professores, sustentados no Modelo-CI, que analisamos no presente texto, ocorreram em aulas da disciplina de Metodologia de Ensino de Matemática, em uma turma do último período (4º ano) de um curso de licenciatura em Matemática, de uma universidade estadual do Paraná, Brasil. Como forma de preservar a identidade dos participantes, os futuros professores estão identificados por pseudônimos. A turma era composta por oito futuros professores e, para o desenvolvimento de todas as tarefas relacionadas às medidas de tendência central[3] (temática que permeia nossa discussão), foram utilizadas seis aulas, com duração de 50 min. cada uma, nos meses de maio e junho de 2013.

As tarefas foram elaboradas tendo em conta os pressupostos estabelecidos por Pfannkuch e Ben-Zvi (2011) como aquilo que se espera de um curso de formação de professores, no que concerne ao conhecimento estatístico, nomeadamente: desenvolver a compreensão dos conceitos estatísticos fundamentais; desenvolver a capacidade de explorar e aprender a partir dos dados; desenvolver argumentação estatística; vislumbrar a possibilidade de utilização da avaliação formativa; e compreender o raciocínio dos alunos.

As aulas retratadas foram conduzidas pelo primeiro autor deste texto (professor da turma) e foram organizadas em dois momentos: (i) as situações e análises didáticas hipotéticas foram exibidas através de projetor multimídia para os futuros professores, que tiveram um tempo para fazer seus registros e, em seguida, apresentar suas considerações à turma num processo dialógico com o mínimo de interferência do professor; (ii) as situações e análises foram retomadas, mas com intervenção maior do professor, com vistas a fomentar e enriquecer a cooperação investigativa e as ideias estatísticas em jogo. Essas aulas foram audiogravadas e posteriormente transcritas para viabilizar a análise.

[3] Apresentamos neste texto parte das discussões realizadas, cujos conceitos abordados envolveram, além dos que ora discutimos, aqueles relacionados à amostragem, desvio padrão, gráficos estatísticos e análise de dados.

Para identificar e discutir os conhecimentos estatísticos para o ensino revelados pelos futuros professores nessa prática, trazemos alguns episódios das aulas, com interações dialógicas, e assumimos o Modelo-CI como pressuposto teórico de análise.

Conhecimentos revelados pelos futuros professores nas interações dialógicas

Iniciamos o trabalho com a análise das interações dialógicas, ocorridas em sala de aula, quando foi apresentada aos futuros professores uma situação hipotética de trabalho com alunos do 9º ano do ensino fundamental (Quadro 1).

Quadro 1:Situação hipotética com alunos do 9º ano

A situação a seguir foi apresentada a alunos de um 9º ano do ensino fundamental e deverá ser utilizada para analisar algumas afirmações feitas por eles a partir de tal situação[4]. Foi realizada uma pesquisa de opinião com 2.500 usuários de um plano de saúde, na qual foi investigado seu nível de satisfação quanto aos serviços prestados pela operadora do plano. Os resultados apontaram 300 usuários plenamente satisfeitos, 575 parcialmente satisfeitos, 750 parcialmente insatisfeitos e 875 totalmente insatisfeitos.

Fonte: Os autores

Para iniciar uma discussão sobre a compreensão dos futuros professores quanto ao conceito de média aritmética simples, foi introduzida uma primeira análise hipotética em que um aluno do 9º ano afirmava: “Como a média é 625, concluo que 625 dos entrevistados estão satisfeitos com a qualidade dos serviços prestados pelo plano de saúde”. A expectativa era a de que os futuros professores observassem que tal interpretação revelava ao menos dois equívocos: (i) emprego indevido do conceito de média para uma variável qualitativa,

[4] Tais afirmações e a nossa intencionalidade são apresentadas no decorrer do texto de análise.

utilizando para isso as frequências das classes e não as classes da variável; (ii) interpretação errônea do conceito de média como o quociente entre a soma das frequências das classes e o total de classes.

> MARIA: Bom, ele sabe calcular uma média porque ele pegou o total e dividiu por quatro. Somou todos (os valores) e como eram quatro, dividiu por quatro. Agora, eu não consigo ver nexo no que ele fez porque eu coloquei aqui (em seus registros) que é um equívoco concluir o que aluno concluiu, porque não tem relação disso com os dados que foram apresentados. Porque, por exemplo, se foi feita uma pesquisa em que 300 acham que estão satisfeitos com a qualidade dos serviços do plano de saúde, por que tem que fazer a média?
> CÉLIA: Se já tem os valores...
> MARIA: Já tem o valor certo, por que ele foi calcular a média?
> CÉLIA: O que eu coloquei foi o seguinte, que como a Maria falou, ele fez a média corretamente. Porém se atrapalhou porque ele dividiu na metade entre satisfeitos e insatisfeitos. Então eu acredito que ele não deve ter analisado o caso dos parcialmente satisfeitos e os parcialmente insatisfeitos. Ele dividiu por quatro porque tinha quatro categorias, mas depois classificou como metade está satisfeita e metade está insatisfeita.
> PROFESSOR: Metade? Por que metade?
> CÉLIA: Não, metade não. É como se fossem só duas categorias. Os satisfeitos e os insatisfeitos. Na minha cabeça não tem como saber se ele não entendeu o que seria os parcialmente satisfeitos e os parcialmente insatisfeitos.

> PROFESSOR: Joana, o que você fez?
> JOANA: Eu fiz bem isso que a Maria falou. Ele sabe fazer a média porque ele pegou o total e dividiu por quatro que são as quatro respostas que os entrevistados deram. Mas há um equívoco porque ela (a situação) está dando os dados, já que 300 pessoas estão satisfeitas, então não faz sentido o que ele pensou. Talvez ele não tenha compreendido o que significa os parcialmente satisfeitos e o que essas pessoas que indicaram o parcialmente de fato estavam, se satisfeitas ou insatisfeitas...

No diálogo, Maria, Célia e Joana assumem a perspectiva de que o aluno sabe fazer a média aritmética, mas não veem sentido no cálculo que ele fez. Elas reconhecem uma perspectiva comum e a avaliam como correta. As justificativas apresentadas por elas revelam um raciocínio que associa a média ao seu algoritmo, em detrimento do conceito, uma vez que enfatizam que o aluno sabe o que é média (associando esse saber ao cálculo) e apenas não é capaz de interpretá-la. Poderíamos dizer que o raciocínio utilizado pelo aluno hipotético, na perspectiva assumida por elas, é bastante semelhante ao raciocínio utilizado para analisá-lo. Na busca de elucidar a compreensão das futuras professoras, perceber e reconhecer sua perspectiva, o professor faz uma reformulação das considerações.

> PROFESSOR: Só para eu entender, para vocês ele sabe média, ele só não sabe interpretar isso aí. Ele está sem nexo nas conclusões, mas ele sabe o que é média?
> MARIA: A menos que... ele colocou ali, ele sabe como calcula, mas ele não sabe o que significa. Porque calcular a média não tem sentido.
> PROFESSOR: Por que não tem sentido, Maria?

MARIA: Eu não consigo ver sentido...
PROFESSOR: O que é média?
JOÃO: É uma medida de tendência central.
PROFESSOR: E o que é uma medida de tendência central?
TURMA: (silêncio)
JOÃO: Eu não sei definir...
PROFESSOR: Vocês não conseguem me dizer o que é uma medida de tendência central?
JOÃO: É um ponto de acumulação dos meus dados... valor que está mais...
PROFESSOR: Um ponto de acumulação?
MARIA: Mas se eu quero saber a média entre 1, 10 e 11. Daí a média não vai ficar exatamente no meio.
PROFESSOR: A média não vai ficar no meio do quê?
MARIA: É que o João falou que a média fica centralizada.
CARLOS: Mas é a mediana...
PROFESSOR: O que é a mediana, Carlos?
CARLOS: É o valor que fica no meio...
LÚCIA: Quando os dados estão ordenados.
CARLOS: É.
PROFESSOR: E a média?
JOÃO: Ah, o valor médio.
PROFESSOR: E o que muda de uma para a outra? As duas são medidas de tendência central?
JOÃO: Sim.
PROFESSOR: E o que muda de uma para outra, ou não muda nada?
MARIA: Acho que deve mudar alguma coisa, mas...

A reformulação feita pelo professor, por meio dos questionamentos, configura um desafio e desencadeia um processo de busca do conceito de média, que origina outras reformulações, constituídas no completar das falas do outro e na contraposição com o conceito de mediana. Percebemos ainda que o diálogo revela uma "confusão" nas posições referentes aos conceitos de média e de medidas de tendência central, que parecem ser assumidos como a mesma coisa. Os raciocínios explicitados no diálogo ora revelam a compreensão de tendência central como média (por exemplo, com a associação da primeira com um ponto de acumulação da distribuição), ora de média como "o" conceito de medida de tendência central (quando Maria exemplifica a média com um caso em que ela não é representativa do conjunto de dados, por este apresentar *outliers*). Do diálogo, emerge ainda o conceito de mediana, aparentemente coerente, mas sem posicionamentos que esclareçam a diferença entre esta e a média. O professor apresenta outra possível análise como uma maneira de desafiá-los, manter o contato e possibilitar o aprofundamento das perspectivas em discussão ou o surgimento de outras perspectivas, qual seja: "A resposta está correta, pois o aluno utilizou a média como medida de tendência central representativa para os dados".

A tentativa do professor não resulta o efeito esperado. Parece haver um conhecimento tácito no grupo, já que ninguém desafia ou questiona a perspectiva assumida, pelo contrário, parecem tê-la avaliado e legitimado. Assim, o professor lança mão de outra sentença hipotética de um aluno do 9º ano: "A resposta não está correta, uma vez que os dados são qualitativos, o que inviabiliza a utilização da média como medida de tendência central representativa".

> MARIA: Ah, falou tudo o que eu queria dizer, só que bonitinho... (risos). Não tem sentido, não tem nexo essa média aí.
> JOÃO: Mas e esse qualitativo?
> PROFESSOR: Tem problema esse qualitativo, João?
> JOÃO: Ah, não sei. Veja bem, se eu pensar na cor

> do olho, acho que é qualitativo. Daí eu vou e pego a quantidade de cada cor e calculo a média...
> PROFESSOR: E no que vai dar a média?
> MARIA: Não tem como calcular a média.
> JOÃO: Não, média não. Não sei qual é a palavra certa... A maior parte.
> MARIA: Moda?
> JOÃO: Moda. É o que mais aparece.
> MARIA: É o que mais aparece.
> PROFESSOR: É isso?
> JOÃO: Ah, Professor... Pela sua expressão, é. Está certo.
> TURMA: (risos)
> PROFESSOR: Ok, então a Maria disse que isso era tudo o que ela queria dizer. Vocês concordam ou discordam?
> TURMA: (parece desconfiada e receosa em concordar, mas acaba concordando).

Essa interpretação, de fato, parece ter sido desafiadora e resultou o efeito esperado de buscar outros elementos e raciocinar de forma distinta. Maria lança uma perspectiva de que concorda com a análise, assumindo uma posição um pouco diferente (ou talvez mais clara) daquela a qual advogava até o momento. Contudo ela não explicita o raciocínio que utiliza para concordar com a sentença. O desafio lançado com o questionamento de João, que caracteriza um pensar alto, origina uma nova possibilidade ou ao menos um aprofundamento da perspectiva de Maria. Passa-se a um processo de reformulação num diálogo entre João e Maria, o qual constitui uma opinião comum que remete ao conceito de moda. A ação do professor, ainda que não intencional, acaba por constituir uma avaliação que legitima o diálogo e, por conseguinte, o raciocínio empregado. Temos que destacar que o raciocínio legitimado só dá conta de esclarecer que, em virtude de os dados serem qualitativos, a média não poderia ser utilizada, enquanto a moda seria desejável.

Dando continuidade, o professor apresenta mais uma sentença hipotética de um aluno: “A análise está correta, mas o valor apresentado para a média na verdade se refere à mediana”.

> MARIA: Não, porque a mediana... é a metade. E 625 não é a metade.
> CÉLIA: E a análise não está correta.
> PROFESSOR: O que seria a mediana?
> PEDRO: A metade.
> PROFESSOR: Metade de que?
> PEDRO: De tudo. Daquilo ali (se referindo ao total de classes), se desse para calcular. Mas nesse caso não dá para calcular.
> PROFESSOR: Por que não dá para calcular?
> JOÃO: O mesmo caso da média. Não é numérico. É qualitativo.
> PROFESSOR: Todos concordam?
> TURMA: (Concorda. Em seguida permanece em silêncio).

Maria posiciona-se, afirmando não ser a mediana porque o cálculo está errado. Célia, Pedro e João parecem perceber e reconhecer com facilidade a perspectiva de Maria, com a qual concordam. E, mesmo com o desafio lançado pelo professor na busca de esclarecer o conceito de mediana, os futuros professores não aprofundam suas perspectivas. Parece que o raciocínio sobre a mediana está “limitado” ao centro da distribuição, mas sem uma clarificação quanto a essa ideia. A menção à necessidade de os dados estarem organizados, que já havia surgido em diálogo anterior, não se faz presente. Considerando essas lacunas, o professor os desafia novamente.

> PROFESSOR: Então eu vou voltar ao começo: o que é mediana?

> CÉLIA: Eu entendi que vocês estão querendo pegar o 575 e o 750 e encontrar um indivíduo do meio. Mas isso não seria a mediana. A mediana seria eu organizar todos os 2.500 entrevistados e encontrar a metade. O que faria sentido porque seria a metade.
> PROFESSOR: Quanto é a metade de dois mil e quinhentos?
> JOÃO: Mil duzentos e cinquenta. O indivíduo estaria no meio dos parcialmente insatisfeitos. Os dois.
> PROFESSOR: Do mesmo modo que o aluno da situação calculou a média da frequência, vocês estão calculando a mediana da frequência. Quando vocês somam as frequências das duas classes centrais e fazem a média, primeiramente o conceito de mediana está equivocado e segundo que vocês estão trabalhando com as frequências. A mediana é das classes e é disso que a Célia está falando. Precisamos determinar onde está o indivíduo ou os indivíduos centrais. Nesse caso é o 1.250 e o 1.251. Fazendo a frequência acumulada, eu consigo determinar a classe onde estão os indivíduos centrais, 1.250 e 1.251. Onde eles estão?
> CÉLIA: Nos parcialmente insatisfeitos.

Com as discussões realizadas no decorrer das aulas, Célia posiciona-se e parece ter percebido um equívoco no raciocínio que a turma havia avaliado como correto. Ela sugere (e dá indícios de estar pensando alto) que eles não estavam observando a distribuição como um todo, mas as duas classes centrais. Muito provavelmente, em decorrência de um equívoco conceitual sobre a mediana, pautado na ideia de que, se ela é o centro, basta calcular a média das duas classes centrais. Além disso, Célia chama a atenção para o fato de que estavam calculando a mediana das frequências das classes e não das classes. Com a intenção de sistematizar esses raciocínios, o professor reformula as enunciações de Célia, tendo em conta possibilitar a percepção e o reconhecimento do raciocínio desta e, assim, suscitar uma perspectiva comum que pudesse ser validada por todos. Contudo tal reconhecimento não ocorre de maneira unânime, conforme explicitado por Maria no diálogo a seguir.

> MARIA: Mas, se eu posso calcular a mediana, eu posso calcular a média e comparar com os dados, então.
> PROFESSOR: Mas você vai calcular a média de quê?
> TURMA: (silêncio)
> PROFESSOR: A mediana é uma medida posicional, enquanto a média, é uma média dos dados. A média eu calculo a partir dos valores dos dados e a mediana a partir da distribuição dos meus dados.
> MARIA: Ah, sim. Agora entendi.

Maria revela uma perspectiva que assume média e mediana com características semelhantes. O silêncio da turma parece revelar que essa perspectiva era partilhada por todos, o que levou o professor a esclarecer que, enquanto a média se relaciona aos dados em si, a mediana é uma medida de posição. Essa reformulação do enunciado anterior parece possibilitar o reconhecimento da perspectiva de Célia e sua validação.

Na aula seguinte o professor apresenta mais uma situação hipotética, na qual um aluno do 9º ano do ensino fundamental utiliza o conceito de moda: “A maioria dos usuários está totalmente insatisfeita (87,5%), o que indica que os serviços da empresa não estão satisfatórios”. A expectativa era a de que os futuros professores observassem que tal interpretação remete a dois raciocínios: (i) a utilização do conceito de moda sem a explicitação dele; (ii) o algoritmo e o conceito equivocado de porcentagem. O professor questiona o que os futuros professores pensam sobre a situação.

> JOÃO: Ele (o aluno) não sabe calcular porcentagem.
> PROFESSOR: Ele não sabe calcular porcentagem?
> MARIA: Ele não sabe interpretar.
> JOÃO: Porque eram 875 pessoas totalmente insatisfeitas. Então ele pensou que a porcentagem era só passar uma vírgula ali na última casa decimal e deu no que deu.
> MARIA: E será que ele não... (pensativa) bom, não ia dar igual. Eu já pensei que ele somou todas as pessoas que não estavam totalmente satisfeitas e considerou como insatisfeitas. Eu não tinha pensado como você (João) falou. Então acho que... Agora acho que não.
> CÉLIA: É, mas eu acho que o que ele pensou...
> PROFESSOR: Ele pensou como Maria?
> MARIA: Não, já desfiz a minha ideia. Eu não tinha pensado no que o João pensou.
> PROFESSOR: Ah, então ele pensou como o João falou?
> MARIA: Eu acho que sim.
> PROFESSOR: Alguém imagina diferente?
> MARIA: Ele achou que mil era o total e...
> PROFESSOR: E aí dividiu. Sim?
> CÉLIA: Aham.

As relações dialógicas entre aluno-aluno e aluno-professor revelam que a primeira perspectiva considerava apenas que o aluno hipotético não sabia calcular porcentagem. Contudo, a partir do desafio lançado pelo professor, concretizado por uma reformulação da afirmação de João como uma questão, Maria sinaliza que tinha uma perspectiva diferente e, ao pensar alto, busca perceber a perspectiva de João, de modo a reconhecê-la e reformular a sua. Célia parece realizar uma trajetória semelhante. Ao final, as duas avaliam a perspectiva de João, abandonam aquelas iniciais e conseguem identificar o real equívoco do aluno hipotético que, aparentemente, considerou 1.000 como sendo o total. Isso revela que o raciocínio compartilhado sobre porcentagem parece estar coerente. Contudo, na aula anterior, o professor havia identificado uma questão que não surgiu nesses diálogos. Assim, ele lança um desafio.

> PROFESSOR: Na aula passada quando vocês estavam remetendo à maioria, vocês estavam falando assim: a maioria é 50% mais um. Vocês não falaram isso? E aí?
> MARIA: É que assim... Se a maioria, nesse caso for 87,5%... Digamos se essa porcentagem estivesse correta, a análise dele estaria correta.
> PROFESSOR: Mas frente aos dados reais da nossa situação inicial, a análise está correta ou não?
> MARIA: Tirando essa primeira linha ali, sim.
> PROFESSOR: Então...
> CÉLIA: Não, mas a maioria, considerando os dados, realmente está insatisfeita.
> MARIA: É.
> JOÃO: É que ele considerou por classes ali. Como se fosse...
> CÉLIA: Totalmente insatisfeito.
> JOÃO: Plenamente, parcialmente, insatisfeito, satisfeito, ele considerou como se fosse essas quatro classes. A que tem o maior valor é a

> totalmente insatisfeita. Ele considerou talvez que por ser a maior essa seria a maioria, talvez, sei lá.
> PROFESSOR: E aí, pessoal? Lúcia, Célia, vocês ouviram o que o João falou? Não, né?
> CÉLIA: A gente estava discutindo aqui.
> PROFESSOR: O que vocês estavam discutindo, antes do João repetir.
> CÉLIA: Não, é que eu falei o seguinte: ele pensou que os 875, entre as quatro categorias, é o que mais tem, que é o totalmente insatisfeitos.
> PROFESSOR: Que é a mesma coisa que o João estava falando.
> CÉLIA: Ah, então, a gente pensou igual, só que eu só falei para dois aqui (Carlos e Lúcia).
> PROFESSOR: Mas a minha pergunta para vocês é: essa maneira de ele pensar, como vocês estão falando, vocês acham que é correta ou não?
> LÚCIA: Nesse caso?
> PROFESSOR: Nesse caso.
> LÚCIA: Eu, eu acho que não. Não sei se eu estou errada, mas eu penso assim... Se a maioria dos votos é 50% mais um, 875 não é, não quer dizer que é 50% mais um, mais qualquer coisa, porque o 50% são 1250 usuários.
> PROFESSOR: Então como é? A maioria teria que ser 50% mais um. No caso 875 não é 50% mais um, então não seria a maioria.
> LÚCIA: É o que eu penso.

O professor havia percebido a falta de clareza quanto à perspectiva dos futuros professores referente ao termo “maioria”. Esse aspecto ratifica a relevância do processo comunicativo no contexto do ensino de estatística, uma vez que alguns termos podem ser compreendidos com diferentes significados, o que compromete o reconhecimento das diferentes perspectivas, os diferentes posicionamentos e a avaliação destes. Assim, o professor desafia os futuros professores, tendo em conta promover uma percepção mais clara das diferentes perspectivas e elucidar a que o termo remete. As justificações apresentadas sinalizam que eles partilham da ideia de maioria como maioria absoluta.

O professor apresenta uma das análises didáticas hipotéticas da resposta apresentada por um aluno para fomentar os diálogos: "A resposta do aluno está coerente, pois ele utiliza a moda para justificar que a maioria dos usuários está insatisfeita".

> MARIA: Mas teria que tirar aquela porcentagem de lá.
> PROFESSOR: Se tirar a porcentagem, resolve? Vocês estavam falando que não resolve.
> MARIA: A porcentagem... E teria que tirar a maioria, porque daí... não, bom...
> PROFESSOR: Teria que tirar a maioria, mas aqui está falando...
> MARIA: Mas a maioria, a moda é a... maior parte.
> JOÃO: Dá para considerar assim: os usuários totalmente insatisfeitos são realmente a moda porque...
> MARIA: Sim.
> LÚCIA: É o que mais aparece.
> PROFESSOR: E o que é a moda?
> JOÃO: É o valor que mais aparece. Que tem a maior frequência.
> PROFESSOR: Mas o valor que mais aparece é a maioria?
> MARIA: É a maior parte.
> CÉLIA: Das quatro categorias sim.
> PROFESSOR: E a maior parte é a maioria ou não é a maioria?

> LÚCIA: Eu não acho que seja.
> MARIA: É aí que tá, né?...
> PROFESSOR: Por que você não acha que seja a maioria, Lúcia?
> LÚCIA: Se for comparar, se 875 com o resto, entre aspas, você soma o resto. Então é a maioria, é a maior parte.
> CARLOS: É a moda, não é a maioria.
> LÚCIA: 875 é menor do que a soma dos outros.

Parece que, com a apresentação da nova sentença, as perspectivas e posicionamentos para o termo "maioria" começaram a ser explicitados e percebidos, originando pensamentos altos e a busca de percepções e reconhecimentos que justificassem os posicionamentos. Fica evidente que os futuros professores compreendem o conceito de moda explicitado por João e legitimado pelos demais, já que utilizam o raciocínio de "ser o que mais aparece" em suas justificações. Contudo o termo "maioria" ainda constitui uma lacuna para o posicionamento definitivo da turma.

Encaminha-se a segunda análise hipotética da situação: "Embora a análise esteja correta, o cálculo da frequência relativa (porcentagem) está equivocado". Os futuros professores concordaram com essa análise, mas as divergências quanto ao emprego do termo "maioria", para se referir à maior parte, persistiram. Como forma de esclarecer essa ideia, o professor recorre à definição do termo.

> PROFESSOR: Confesso que vocês me levaram a pensar sobre os termos "maioria" e "maior parte" e fui procurar em livros de estatística. Não encontrei coisa alguma. Em dicionários encontrei isso (e apresenta a definição de maioria como condição do que é maior; superioridade, supremacia, a maior parte; o maior número).
> CÉLIA: Ah, é a mesma coisa.

> PROFESSOR: Se for maioria absoluta, vem a questão de cinquenta por cento mais um. Se for só maioria, é sinônimo de a maior parte.
> PEDRO: Não, professor. Acho que a consideração que nós fizemos foi pensar que a maior parte comparando com as outras três somadas. Tipo a maioria, seria mais do que as outras três somadas.
> PROFESSOR: Ok, mas o que é moda?
> PEDRO: O que aparece mais vezes.
> PROFESSOR: E não é a maioria?
> PEDRO: É, talvez tenha sido algo que nós pensamos, mas...
> JOÃO: Não sei se o professor já percebeu, mas o português tem muita dificuldade para expressar ideias matemáticas.

Embora os diálogos iniciais tenham apontado que os alunos tinham compreensão do conceito de moda, a perspectiva enunciada por Pedro (a qual aparentemente a turma reconhecia) revela um equívoco no processo de transposição do conceito para a situação prática. O desafio materializado pela questão do professor parece constituir o elo entre as duas ideias e favorecer o raciocínio sobre a moda no contexto da situação.

Considerações finais: implicações para o ensino de estatística

Discutir o conhecimento necessário ao professor para ensinar, particularmente estatística, é tarefa extremamente complexa e demanda estudos mais amplos, de cunho quantitativo e qualitativo, no campo da prática letiva, de modo a clarificar suas efetivas demandas tanto de natureza estatística quanto didático-pedagógica, em consonância com o currículo. Assim, fica evidente nossa despretensão de esgotar esse debate no presente texto. Na verdade, nossa intenção é assente exatamente em evidenciar tal complexidade e, sobretudo, salientar que muitas das práticas presentes nas salas de aula da educação básica são reflexos das oportunidades e experiências de formação oferecidas aos professores. Dessa forma, apesar da importância de trabalhos que investiguem os conhecimentos estatísticos dos professores e denunciem suas deficiências e dificuldades (refletidas em sua prática), são indispensáveis investigações que discutam práticas de formação para promoção de oportunidades de redimensionamento desses conhecimentos e que, de algum modo, evidenciem suas contribuições para superação das dificuldades amplamente conhecidas.

Nesse sentido, a realização de análises de situações didáticas hipotéticas, apoiadas no Modelo-CI, parece constituir uma prática interessante, à medida que, em processos dialógicos de negociação de significados, foram revelados crenças, conhecimentos e desconhecimentos, os quais desencadearam e sustentaram reflexões conjuntas, com vistas a seu redimensionamento. Parece que um potencial das análises realizadas reside na promoção simultânea dos diversos conhecimentos necessários para ensinar estatística, em consonância com as orientações de Burgess (2008). Isso porque uma dificuldade dos cursos de formação consiste em relacionar conhecimento de conteúdo a conhecimento pedagógico de conteúdo, que muitas vezes são tratados de maneira dicotomizada, cuja inter-relação fica a cargo do aprendiz.

Assim, os processos dialógicos na formação inicial, apresentados em nossa análise, motivaram a emergência de compreensões promissoras, relacionadas ao conhecimento estatístico para o ensino, particularmente no que se refere à reflexão sobre pesquisas estatísticas, prática de argumentação estatística e análise da natureza dos erros dos alunos. Tais aspectos parecem configurar implicações fundamentais para o ensino de estatística nos cursos de Licenciatura em Matemática, conforme descrevemos.

Ao possibilitar reflexões compartilhadas sobre os conceitos e ideias relacionados às pesquisas estatísticas, percebemos uma considerável ampliação nas perspectivas dos futuros professores no que se refere ao conhecimento estatístico comum. Além de refletirem sobre aspectos conceituais das medidas de tendência central, eles puderam desenvolver sua literacia estatística, particularmente no que se refere ao pensamento sobre a transnumeração e integração da estatística com o contexto. Uma síntese dos conhecimentos revelados em comparação com aqueles desejáveis aos professores é apresentada no Quadro 2.

Quadro 2: Conhecimento estatístico para o ensino revelado e desejável

Conceito	Conhecimentos revelados	Conhecimentos desejáveis para o ensino
Média	- média como o algoritmo; - cálculo da média de variáveis qualitativas; - média como quociente entre as somas das frequências das classes e o total de classes da variável; - média como "a" medida de tendência central; - média como representativa de distribuições com *outliers*; - confusão/diferenciação entre média e mediana.	- compreender a média como uma medida de tendência central que se espera representar um conglomerado de dados da distribuição; - compreender equívocos relacionados à média, como o cálculo da média de variáveis qualitativas, utilizando as frequências das classes da variável; - compreender quando se deve ou não utilizar a média como medida representativa.
Moda	- moda como maioria absoluta; - moda como maior parte; - moda como maioria; - moda como maior frequência; - moda como medida de tendência central para dados qualitativos.	- compreender a moda como medida que representa a maior frequência; - reconhecer a moda como medida representativa para dados qualitativos.
Mediana	- só é possível calcular mediana para dados quantitativos; - mediana como a média das classes centrais de uma distribuição; - confusão/diferenciação entre mediana e média; - mediana como centro da distribuição; - necessidade de dados ordenados; - mediana como medida de posição que indica o elemento central da distribuição.	- compreender a mediana como o centro da distribuição ordenada; - compreender que, diferentemente da média, a mediana não é afetada por *outliers*; - compreender que a mediana pode ser utilizada para dados quantitativos ou qualitativos ordinais.

Fonte: Os autores

Por outro lado, as hipóteses presentes nas análises provocaram os professores a desenvolverem a prática de argumentação, a qual favoreceu o desenvolvimento de conhecimento estatístico especializado. A percepção e reconhecimento das diferentes perspectivas relacionadas aos conceitos de média, moda e mediana só foram possíveis em decorrência dos diálogos realizados. As enunciações presentes nos diálogos originaram reformulações e desafios, os quais tornaram patentes a elaboração e aprimoramento de argumentos consistentes para o convencimento do outro, o estabelecimento de posicionamentos e a avaliação das diferentes perspectivas. No decorrer desse processo, o pensar alto sempre se fez presente e de fato revelou um elemento importante no processo de aprendizagem, à medida que muitas vezes no pensamento alheio é que o indivíduo reconheceu seu equívoco, esclareceu sua dúvida, confirmou sua hipótese etc. Nesse sentido, a realização das argumentações colocou em evidência a limitação do algoritmo para a compreensão e explicação dos conceitos em causa. Para além de saber calcular os valores das medidas, é necessário que os (futuros) professores saibam como, quando e por que utilizam (ou não) determinada medida de tendência central para representar um conjunto de dados, em acordo com os achados de Casey (2010). Por exemplo, não é suficiente ser capaz de calcular o valor da média aritmética. É preciso que saibam como ele é calculado, por que é calculado dessa forma e suas implicações para além do cálculo, tais como a influência de valores discrepantes (*outliers*).

Por fim, utilizar ideias nem sempre corretas nas sentenças analisadas possibilitou um rompimento com o absolutismo da sala de aula (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010) e um olhar mais cuidadoso para a natureza dos erros dos alunos e possíveis formas de tratá-los. Assim, os futuros professores puderam trazer, de fato, os alunos, suas estratégias, registros e raciocínios para o centro do processo didático-pedagógico, buscando dar sentido a essas diferentes ideias. Isso contribuiu para o desenvolvimento de conhecimento de estatística e do aluno e, de algum modo, do currículo, já que puderam pensar as relações dos conhecimentos estatísticos com outras áreas da matemática (porcentagem, por exemplo). Considerando os apontamentos de Sorto e White (2004) acerca das dificuldades dos professores em identificar os erros dos alunos, talvez este seja o grande potencial das análises das situações didáticas aqui apresentadas. Como os próprios futuros professores disseram, eles nunca haviam pensado em erros semelhantes aos com que se depararam no decorrer dessa experiência. Com a reflexão sobre como e por que o aluno pode ter errado, em detrimento de uma classificação simplória entre certo ou errado, os futuros professores puderam refletir sobre a particularidade do conhecimento demandado nas práticas de sala de aula e, assim, perceber que apenas saber estatística não é suficiente. Para nós, esse é um aspecto-chave para avanços no que se refere à Educação Estatística em todos os níveis de ensino, especialmente na educação básica.

Referências

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov./dez. 2008.

BURGESS, Tim. Teacher knowledge for teaching statistics through investigations. In: BATANERO, Carmen; BURRILL, Gail; READING, Chris; ROSSMAN, Allan. (ed.). **Joint ICMI/IASE Study**: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey: ICMI & IASE, 2008.

CASEY, Stephanie. Subject matter knowledge for teaching statistical association. **Statistics Education Research Journal**, v. 2, n. 9, p. 50-68, nov. 2010.

CHAPMAN, Olive; HEATER, Brenda. Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v.13, n.6, p.445-458, 2010.

ESTEVAM, Everton José Goldoni. Conhecimento didático em estatística de futuros professores de matemática: retrospectivas e perspectivas. In: XI ENEM –Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 18 a 21 de jul. 2013. **Anais...**, p. 1-15. Disponível em: http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/813_166_ID.pdf. Acesso em: 20 jun. 2016.

ESTEVAM, Everton José Goldoni; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Educação estatística e a formação de professores de matemática: cenário de pesquisas brasileiras. **Zetetiké – Revista de Educação Matemática**, Campinas, v. 22, n. 42, p. 123-149, jun./dez. 2014.

FERRARO, Alceu Ravanello. Analfabetismo e níveis de letramento no Brasil: o que dizem os censos? **Educação e Sociedade**, v. 23, n. 81, p. 21-47, dez. 2002.

GARFIELD, Joan; GAL, Iddo. Teaching and assessing statistical reasoning. In: STIFF, Lee. (ed.). **Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12.** Reston, VA: National Council Teachers of Mathematics, 1999, p. 207-219.

JACOBBE, Tim; CARVALHO, Carolina. Teachers Understanding of Averages. In: BATANERO, Carmen; BURRILL, Gail; READING, Chris (eds.). **Teaching Statistics in School Mathematics – Challenges for Teaching and Teacher Education**: A Joint ICMI/IASE Study. London: Springer, 2011, p. 199-209.

PFANNKUCH, Maxine; BEN-ZVI, Dani. Developing Teachers' Statistical Thinking. In: BATANERO, Carmen; BURRILL, Gail; READING, Chris (eds.). **Teaching Statistics in School Mathematics – Challenges for Teaching and Teacher Education**: A Joint ICMI/IASE Study. London: Springer, 2011. p. 323-334.

SHAUGHNESSY, Michael. Research on statistics learning and reasoning. In: LESTER Jr., Frank (ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, 2007, p. 957-1009.

SHULMAN, Lee. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Research**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SORTO, Alejandra; WHITE, Alexander. Statistical Knowledge for Teaching. In: **Proceedings do ICME 10**, Copenhagen, 2004.

WATSON, Jane. Assessing statistical thinking using the media. In: GAL, Iddo; GARFIELD, Joan (eds.). **The Assessment Challenge in Statistics Education.** Amsterdam: IOS Press, 1997, p. 107-121.

WEGERIF, Rupert. **Mind expanding:** teaching for thinking and creativity in primary education. Maidenhead, UK: Open University Press, 2010.

WILD, Chries; PFANNKUCH, Maxine. Statistical Thinking in Empirical Enquiry. **International Statistical Review**, v. 67, n. 3, p. 223-265, 1999.

Capítulo 2

Do aprender ao aprender ensinar geometrias: unidade entre o ensino e a aprendizagem

Talita Secorun dos Santos
Maria do Carmo de Sousa

Introdução[1]

Os cursos de licenciatura em matemática, em geral, são quase que exclusivamente baseados em disciplinas com abordagens axiomático-dedutivas e com grande preocupação com o rigor e com o encaminhamento lógico de conceitos e proposições. Há pouco espaço nas disciplinas para se discutir filosofia, história, política ou práticas sociais e se descartam elementos de extrema importância para o professor que deverá atuar em instituições escolares.

Segundo Libâneo (2010, p. 11), precisamos conceber a escola como espaço de integração e síntese, para formarmos cidadãos participantes em todas as instâncias da vida social contemporânea e preparados para uma leitura crítica das transformações que ocorrem em escala mundial. Para o mesmo autor, tudo que esperamos da escola para os alunos deve, também, ser colocado aos professores. E isso sugere que as universidades e os cursos de formação precisam,

---

[1] Este trabalho está vinculado à pesquisa de doutorado, no Programa de Pós-Graduação em Educação – UFSCar, da primeira autora, e teve apoio da Fundação Araucária, por meio de bolsa de estudos vinculada ao Programa de Apoio à Capacitação Docente das Instituições Estaduais de Ensino Superior – PCD-IEES.

segundo o mesmo autor, formar professores com uma cultura geral mais ampliada, com capacidade de aprender a aprender, com competências para saber agir na sala de aula, com domínio da linguagem informacional, sabendo usar meios de comunicação e articular as aulas com as mídias e multimídias.

Concordamos com Libâneo (2006), segundo o qual, a teoria sócio-histórica da atividade possibilita compreender a formação de professores a partir do trabalho real e das práticas no contexto de trabalho. Além disso, essa teoria permite juntar quatro componentes da prática do professor:

> uma cultura científica crítica como suportes teóricos ao trabalho docente; conteúdos instrumentais que assegurem o saber-fazer; uma estrutura de organização e gestão das escolas que propicie espaços de aprendizagem e de desenvolvimento profissional; uma base de convicções ético-políticas que permita a inserção do trabalho docente num conjunto de condicionantes políticos e culturais (LIBÂNEO, 2006, p. 75).

Esses componentes da prática docente podem ser harmonizados na teoria histórico-cultural. Nesse modelo, a atividade do professor em formação é caracterizada por um desenvolvimento de uma educação humanizadora de ensino, uma educação que atribui valor à atividade humana e à formação do conhecimento científico. O homem se humaniza, quando se apropria da cultura historicamente acumulada, e, ao se humanizar, constitui a humanidade e a educação é um processo que humaniza. Concordamos que a apropriação de elementos da cultura humana ocorre também fora do contexto escolar, de acordo com as necessidades e interesses de todos os envolvidos.

Buscando romper com a concepção de formação baseada apenas no rigor e no encaminhamento lógico de conceitos e proposições, e procurando nos aproximar de uma educação humanizadora de ensino, durante o ano letivo de 2013, na formação inicial de professores de matemática, utilizamos das Atividades de Ensino (AE) de geometrias na perspectiva lógico-histórica, a partir da dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe, acrescida de um quarto momento, a escrita de uma narrativa dos licenciandos e postada no Google Grupos. A nosso ver, as AE se apresentam como uma das possibilidades, uma vez que elas devem gerar e promover a Atividades de Aprendizagem, ou seja, devem criar um motivo especial para que os estudantes aprendam teoricamente sobre a realidade. Assim, entendemos que as AE mediam a ação pedagógica e desencadeiam a aprendizagem, não apenas do aluno como também do professor.

O conceito de atividade é entendido aqui com base na perspectiva leontieviana e recorreremos ao conceito de Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como um recurso metodológico que possa contribuir para a formação inicial de professores de matemática, com o objetivo de uma perspectiva de formação não alienante e na qual os sujeitos em formação possam se apropriar do conhecimento historicamente construído e discutir e pensar acerca de seus futuros objetos de trabalho. O conceito de trabalho não é compreendido como uma preparação para o mercado, mas como uma atividade humana, adequada a um fim, a qual promove a geração de conhecimentos, considerando que é por meio do trabalho que conhecemos e construímos conhecimento.

No caso da formação de professores, entendemos o trabalho do professor como uma atividade humana, que tem por objetivo a formação de sujeitos que possam se apropriar da cultura historicamente acumulada, ao mesmo tempo em que constroem conhecimentos sobre si mesmos. Ou seja, ao ensinar matemática, o professor tem a oportunidade de teorizar sobre os conteúdos que ministra e de gerar novos conhecimentos relacionados ao ensinar e ao aprender.

Na procura da organização do ensino, na unidade entre a teoria e a prática é que se constituem a atividade do professor, a atividade de ensino. “Essa atividade se constituirá como práxis pedagógica se permitir a transformação da realidade escolar por meio da transformação dos sujeitos, professores e alunos” (MOURA et al., 2010, p. 213).

A atividade de ensino do professor deve gerar e promover a atividade do estudante, e criar nele um motivo especial para a sua atividade: estudar e aprender teoricamente sobre a realidade. É com essa intenção que o professor organiza a sua própria atividade e suas ações de orientação, organização e avaliação (MOURA et al., 2010).

No caso da formação de professores, a atividade de ensino do professor formador de professores deve, além de levar os licenciandos a ter um motivo especial para estudar e aprender teoricamente sobre a realidade estudada, criar motivos para estudar e compreender a sua inserção no trabalho docente. Assim, a atividade de ensino do professor formador está diretamente ligada à atividade educativa do futuro professor.

Considerando os pressupostos acima, neste trabalho analisaremos a categoria do aprender ao aprender a ensinar que emergiu da análise dos materiais construídos em uma pesquisa que visava compreender se as AE de geometria na perspectiva lógico-histórico se configurariam como unidade entre o ensino e a aprendizagem, ou seja, como AOE. Nesta categoria, analisamos excertos que nos permitem inferir que as atividades desenvolvidas foram geradoras de necessidades e motivos para ensinar, aprender e aprender a ensinar geometrias.

Contextualizando a pesquisa

A presente pesquisa está inserida no ideal de uma pesquisa qualitativa, considerando-se o exposto por Bogdan e Biklen (1999), quando afirmam que na investigação qualitativa a fonte direta dos dados é o ambiente natural, o que constitui o instrumento principal - o pesquisador permanece no ambiente pesquisado com o intuito de relatar e observar com maior clareza e precisão o ambiente “natural” dos sujeitos.

Ao conduzir esta pesquisa qualitativamente e procurando nos aproximar da teoria histórico-cultural, desenvolvemos esta investigação, durante o ano de 2013, com 30 licenciandos do curso de matemática da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Câmpus de Campo Mourão, sendo 11 alunos do quarto ano e matriculados na disciplina de Geometria e 19 licenciados do segundo ano e matriculados na disciplina de Geometria Euclidiana e tópicos de Geometrias não euclidianas. Vale salientar que, nesse mesmo ano, havia duas grades curriculares vigentes no curso, por conta de uma mudança no Projeto Político-Pedagógico (PPP). A disciplina de geometria, ministrada aos alunos do quarto ano, fazia parte do PPP antigo e não vigora desde 2014 e a disciplina de geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas faz parte do novo PPP, vigente desde 2011.

Para a construção dos dados da pesquisa, organizamos dois ambientes de pesquisa e estudo, o primeiro, denominamos presencial, já que aconteceu no interior da sala de aula e com a presença da professora/pesquisadora e dos licenciandos, e o segundo ambiente, denominamos virtual porque ocorreu via Google Grupos.

No ambiente presencial, portanto nas salas de aula, encontramo-nos com os licenciandos no período de um ano, semanalmente, durante 4h, para estudar as atividades de ensino, as quais serão denominadas de AE, que foram elaboradas com elementos lógico-históricos, presentes na história da geometria euclidiana e das geometrias não euclidianas. Tais elementos tinham por objetivo desencadear situações de aprendizagem, de forma que os licenciandos pudessem se apropriar de conhecimentos acerca dessas geometrias. Ao mesmo tempo, procurávamos analisar com os licenciandos o papel desses conhecimentos em suas futuras práticas docentes.

Assim, a pesquisa de campo teve início com o ano letivo de 2013 e ela se encerrou no final do mesmo ano. As aulas eram semanais, com carga-horária semanal de 4 horas-aula e as disciplinas desenvolvidas: Geometria e Geometria euclidiana e tópicos de Geometrias não euclidianas são anuais, cada uma com carga-horária que totaliza 144 horas-aula.

O segundo ambiente, portanto, o virtual, organizado para que a construção dos dados fosse possível, foi o Google Grupos. Criamos dois grupos de discussões, um para a disciplina de Geometria e um para a disciplina de Geometria euclidiana e tópicos de Geometrias não euclidianas, onde ocorreram as discussões e debates on-line sobre os encontros presenciais. Nesse ambiente virtual, os licenciandos postaram suas narrativas, puderam ler as dos demais participantes, compartilharam dúvidas, incertezas, inseguranças e analisaram os momentos vivenciados durante a disciplina por meio de suas narrativas.

As disciplinas foram pautadas na dinâmica relacional, proposta por Sousa (2004) e Ferreira (2005) e composta de três momentos: primeiramente, individualmente, os licenciandos analisavam uma situação proposta e produziam uma síntese que indicava uma possível resposta. Depois, em pequenos grupos, as sínteses individuais foram analisadas e reelaboradas. Aqui, o grupo produzia uma única síntese, a partir das reflexões coletivas. No momento seguinte, cada grupo apresentava a sua síntese para toda a turma, para que a mesma chegasse à melhor resposta para si mesma. Ou seja, as primeiras teorizações sobre determinado conteúdo foram feitas pelos licenciandos. Nesse momento, eles tinham a oportunidade de explicitarem, individualmente, os sentidos que davam aos conceitos tratados, e, em pequenos grupos, tais sentidos eram coletivizados. Dessa forma, os grupos explicitavam os significados que produziam. Pelos estudos de Leontiev, entendemos que sentido e significado caminham juntos. No caso específico desta pesquisa, os sentidos individuais se convergiram em sentidos coletivos, produziram significados. Isso não quer dizer que os sentidos e os significados produzidos pelos licenciandos coadunam-se tanto com os nossos, quanto com os sentidos e os significados explicitados por teóricos em seus estudos. Alguns sentidos e significados possuem aproximações, ou seja, coincidem com os dos teóricos. Outros, nem tanto.

Além dos três momentos da dinâmica, criamos o quarto momento: a escrita de uma narrativa individual e postagem dessas narrativas no fórum de discussão no Google Grupos para que as reflexões pudessem continuar, à medida que a turma entendesse ser necessário. Denominamos os quatro momentos de dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativa.

Para a construção dos dados, foram utilizados quatro instrumentos: um questionário inicial, 11 atividades de ensino, diário de campo da professora/pesquisadora e narrativas dos licenciandos, postadas no ambiente virtual.

Os 11 sujeitos do quarto ano de matemática foram denominados de: Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10 e Q11 e os outros 19 participantes, do segundo ano, S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8, S9, S10, S11, S12, S13, S14, S15, S16, S17, S18 e S19. As narrativas foram enumeradas de 1 a 15 e foram denotadas N1, N2, ..., N11. Dessa forma, durante a análise, ao denominarmos S1-N1, estamos nos referindo ao excerto do aluno do segundo ano, denominado S1, da narrativa denominada N1, a qual se refere à AE1. Q3-N5 apresenta um excerto de um licenciando do quarto ano, denominado Q3, da narrativa denominada N5, referente à AE5.

A análise dos dados considerou inicialmente a análise do questionário e das narrativas referentes às 11 AE. Durante a análise do questionário, procuramos descrever os sujeitos participantes da pesquisa e os motivos que os levaram a cursar a disciplina.

Para a análise das narrativas referentes às 11 AE (AE1, AE2, ..., AE11), houve o estabelecimento das unidades de análise das narrativas.

Assim, as narrativas foram fragmentadas e os excertos das narrativas foram separados em unidades de análise das narrativas, de acordo com o significado que entendemos que comportavam e com a convergência de ideias presentes em um ou mais excertos de narrativas. As unidades de análise das narrativas não foram estabelecidas a priori, surgiram durante a análise e são excludentes entre si, ou seja, cada excerto da narrativa pode ser encontrado em apenas uma unidade de análise das narrativas.

Foram estabelecidas nove unidades de análises das narrativas: 1) descrição da atividade, 2) mudanças, 3) reflexões, 4) preocupação com a prática, 5) (re)significações de conceitos, 6) da verdade matemática às verdades matemáticas, 7) críticas às atividades, 8) concepção de matemática como construção humana, 9) preocupação com as notas e com as avaliações.

O próximo passo da pesquisa, a triangulação dos dados foi feita a partir dos conteúdos que constavam no diário de campo, no questionário, nas unidades de análise das narrativas, nas narrativas referentes às avaliações e nas AE. Dessa triangulação emergiram quatro categorias de análise: Do isolado ao coletivo; O novo, Do aprender ao aprender a ensinar; Contradições.

Neste trabalho abordaremos a categoria "Do aprender ao aprender a ensinar" que emergiu da triangulação dos dados contidos no questionário, nas narrativas e nas AE. A figura a seguir apresenta a articulação desses três instrumentos.

Figura 1: Categoria: do aprender ao aprender a ensinar

Fonte: Elaborado pelas autoras

Na categoria “Do aprender ao aprender a ensinar”, procuramos inferir se as AE desenvolvidas foram geradoras de necessidades e motivos para ensinar, aprender e aprender a ensinar geometrias.

Atividade orientadora de ensino e formação inicial do professor

De acordo com Moretti e Moura (2010), a necessidade do sentido na formação docente tem sido tomada no senso comum. No entanto, para os autores, a relação entre a formação docente e o sentido atribuído pelo sujeito em formação às suas ações não é tão óbvia.

No caso desta pesquisa, o grande desafio foi criar condições para que o professor em formação pudesse rever os motivos que o moviam a cursar a disciplina e assim pudesse atribuir novos sentidos a sua organização de ensino, para quem já era professor, e novos sentidos para a sua futura organização de ensino para quem ainda não o era,

O sentido pessoal corresponde a um motivo. Leontiev et al. (2006) afirmam ainda que o termo motivo pode corresponder a fenômenos completamente diferentes, tais como impulso, inclinações, apetites biológicos, ideais de vida, dentre outros. Mas, para os autores, trata-se de uma questão acerca das relações entre motivos e necessidades. A necessidade aparece, primeiramente, só como uma condição inicial para a atividade, quando o sujeito começa a agir é que ocorre a transformação.

Leontiev et al. (2006) denominam dois tipos de motivos: os compreensíveis e os motivos realmente eficazes.

> Os primeiros são aqueles que não coincidem com o objeto da atividade. Assim, por exemplo, se um professor participa de um programa de formação continuada porque isso lhe possibilita ascensão funcional, seu motivo – promoção – não coincide com o objeto de sua atividade: leitura, discussões, elaboração de propostas didáticas. Neste caso,

> temos, então, um motivo compreensível. No entanto são exatamente os motivos compreensíveis que se tornam motivos eficazes (MORETTI; MOURA, 2010, p. 158).

Segundo Leontiev et al. (2006), um motivo compreensível pode vir a ser um motivo realmente eficaz. Ou seja, um grupo que inicialmente participa de um programa de formação continuada, porque isso lhe possibilita ascensão funcional, pode passar a ver outro sentido naquele curso, como, por exemplo, possibilitar respostas para sua necessidade de ensinar, assim, a ação de realizar o curso passa a ser orientada por um motivo e transforma-se em atividade.

No caso desta pesquisa, pensamos que, para alguns licenciandos, a disciplina de Geometria euclidiana e tópicos de Geometrias não euclidianas e a disciplina de Geometria podem se configurar apenas como necessárias para que se cumpra a grade curricular do curso. No entanto, podemos possibilitar um pensar diferente, que possa provocar mudanças em como os licenciandos concebiam o ensinar na sua futura prática docente. Assim, eles passam a buscar respostas para a sua necessidade de ensinar, e a ação de realizar a disciplina, orientada por um motivo, transforma-se em atividade.

O motivo está sempre ligado ao sentido pessoal. "Isso porque o sentido é sempre sentido de algo, não sendo possível falar em sentido puro" (MORETTI; MOURA, 2010, p. 159). O sentido que o sujeito atribui à ação faz mudar o motivo, podendo torná-lo eficaz, quando coincidir com o objeto da atividade.

Entender o movimento dos motivos pode nos ajudar a compreender por que muitas ações de formação, inicial e continuada de professores têm pouco impacto. O que faz o sujeito entrar em atividade é o motivo eficaz, mas o sujeito inicia sua atividade por conta dos motivos compreensíveis.

Se em um processo de formação os motivos compreensíveis não se transformam em motivos eficazes, dificilmente haverá uma mudança da prática. A transformação dos motivos só ocorre na própria atividade do sujeito, a partir do momento em que ele atribui sentido às suas atividades. O professor tem que atribuir sentido à sua prática.

É necessário que se distinga o conceito de sentido e o de significado, já que eles são intrinsecamente ligados, "mas apenas por uma relação inversa da assinalada precedentemente; ou seja, é o sentido que se exprime nas significações (com os motivos nos fins) e não a significação no sentido" (LEONTIEV, 2010, p. 105).

Para melhor compreendermos a dissociação entre os conceitos de sentido e significado, Leontiev (2010) traz o seguinte exemplo: imaginemos que seja preciso compreender a significação de uma data de um acontecimento histórico, isso não exclui a possibilidade de a data em questão apresentar diferentes sentidos para o homem. "Um sentido para o jovem ainda nos bancos da escola, outro sentido para o mesmo jovem que partiu para o campo de batalha a defender a sua pátria e dar a vida por ela" (LEONTIEV, 2010, p. 105). Assim também pensamos a atividade docente, ela tem um sentido para os licenciandos que já lecionam e outro para aqueles que ainda estão sentados apenas nos bancos das universidades.

Já a significação é, para Leontiev (2010), a forma como o homem assimila a experiência humana:

> a generalização da realidade que é cristalizada e fixada num vetor sensível, ordinariamente a palavra ou a locução. [...] A significação é, portanto, a forma sob a qual um homem assimila a experiência humana generalizada e refletida. [...] A significação mediatiza o reflexo do mundo pelo homem na medida em que ele tem consciência deste, isto é, na medida em que o seu reflexo do mundo se apoia na experiência da prática social e a integra (LEONTIEV, 2010, p. 101).

Leontiev (2010, p. 101) sinaliza para a compreensão das significações, afirmando que as mesmas "não têm existência fora dos cérebros humanos concretos; não existe qualquer reino de significações independente e comparável ao mundo platônico das ideias".

> Naturalmente, o que eu penso, compreendo e sei do triângulo, pode não coincidir perfeitamente com a significação 'triângulo' admitida na geometria moderna. [...] Por consequência, não podemos opor uma significação 'geométrica', lógica e, em geral, objetiva, a esta mesma significação de um indivíduo enquanto significação psicológica particular. A diferença não é entre o lógico e o psicológico, mas entre o geral e o particular, o individual (LEONTIEV, 2010, p. 101).

Ainda de acordo com o autor, o homem, ao nascer, encontra significações prontas e elaboradoras historicamente e apropria-se delas tal como se apropria de um instrumento. A apropriação ou não, a assimilação ou não, o grau de assimilação e o que tal significação se torna para mim dependem do sentido pessoal que tal significação tem para mim. Ou seja, o sentido é atribuído pelo sujeito no decorrer da própria vida, e, portanto, não é possível ensinar o sentido de algo a alguém.

Para Moretti e Moura (2010, p. 160), "a implicação disso para a formação de professores é que as ações desencadeadas por estes no âmbito de tais propostas devem ter como referência direta o seu trabalho docente", uma vez que se constituam como respostas às suas necessidades. Logo, segundo esses autores, o professor em atividade de ensino é levado, por sua necessidade, a buscar instrumentos e planejar ações coerentes com seus motivos antes, durante e depois do trabalho em sala de aula.

Sendo assim, podemos dizer que o professor está em atividade de ensino não apenas quando desenvolve suas ações em sala de aula, mas também quando planeja, organiza, reorganiza suas ações e as direciona a partir da avaliação dos resultados obtidos. O professor se constitui professor por seu trabalho, ou seja, pela atividade de ensino. “Na busca de organizar o ensino, recorrendo à articulação entre a teoria e a prática é que constitui a atividade do professor, mais especificamente, a atividade de ensino” (MOURA et al., 2010, p. 214).

Conforme Moura et al. (2010), a AE do professor deve gerar a atividade do estudante, ou seja, deve provocar nele um motivo especial para a sua atividade, que é estudar e aprender teoricamente sobre a realidade. O professor não pode perder de vista que tão importante quanto a sua atividade é a atividade de aprendizagem que o estudante desenvolve.

> Daí a importância de que os professores tenham a compreensão sobre seu objeto de ensino, que deverá se transformar em objeto de aprendizagem para os estudantes. Além disso, é fundamental que no processo de ensino, o objeto a ser ensinado seja compreendido pelos estudantes como objeto de aprendizagem. Isso, para a teoria histórico-cultural, só é possível se este mesmo objeto se constitui como uma necessidade para eles. Assim, os conhecimentos teóricos são ao mesmo tempo objeto e necessidade na atividade de aprendizagem (MOURA et al., 2010, p. 215).

E como pensar a AE do professor formador de professores? Nesse caso, a atividade de ensino do professor formador deve gerar a atividade do estudante, ou seja, deve criar um motivo para a sua atividade, que é aprender teoricamente sobre a realidade, colocar-se frente à realidade, apropriar-se do momento histórico de maneira que permita pensar historicamente a realidade e reagir a ela e compreender como trabalhar com essas questões na sua futura prática docente. Assim, a atividade de aprendizagem dos licenciandos está intimamente ligada a sua futura atividade de ensino.

Corroboramos Moura et al. (2010), segundo os quais, na AOE existe a unidade entre a atividade de ensino e a atividade de aprendizagem. Ou seja, a AOE como metodologia de organização do ensino se constitui pela atividade de ensino do professor e a atividade de aprendizagem do licenciando.

> Na AOE, ambos, professor e aluno, são sujeitos em atividade e como sujeitos se constituem como indivíduos portadores de conhecimentos, valores e afetividade que estarão presentes no modo como realizarão as ações que têm por objetivo um conhecimento de qualidade nova. Tomar consciência de que sujeitos em atividade são indivíduos é primordial para considerar a Atividade Orientadora de Ensino como um processo de aproximação constante do objeto: o conhecimento de qualidade nova. A atividade assim, só pode ser orientadora (MOURA et al., 2010, p. 218).

No contexto escolar, os autores (MOURA et al., 2010, p. 18) destacam que "a necessidade do professor é a de ensinar e a do aluno é aprender". Já no contexto da formação inicial de professores, inferimos que os sujeitos são o professor formador de professores e o aluno um futuro professor, que podemos denominar licenciando ou acadêmico. O objetivo do primeiro sujeito vai além de ensinar, ele também objetiva formar professores. Os objetivos do licenciando são aprender o conhecimento teórico e se tornar professor. Os motivos do professor formador de professores são a organização do ensino e a orientação acerca do ensinar e suas ações devem ser organizadas de forma a possibilitar aos licenciandos a apropriação do conhecimento teórico bem como a compreensão de como trabalhar com o conhecimento teórico na futura prática docente. Sendo assim, inferimos que no contexto da formação de professores a AE medeia a ação pedagógica e a aprendizagem de conteúdos e da docência.

No caso desta pesquisa, ao fazermos uso das AE e ao planejarmos a organização do ensino, a partir dos pressupostos da AOE, consideramos que as geometrias são os conhecimentos teóricos, ensinar geometrias e propor AE para pensar a futura prática docente são os motivos. Os objetivos são três principais: o primeiro é discutir o aprender e o ensinar, o segundo é compreender os conceitos matemáticos relacionados à geometria euclidiana e geometrias não euclidianas e o terceiro é formar professores para desenvolver os conceitos dessas geometrias na educação básica.

Assim, tínhamos por hipótese que as atividades desenvolvidas nas disciplinas poderiam vir a ser geradoras de necessidades e motivos para ensinar, aprender, aprender a ensinar geometrias e, vivenciadas pela dinâmica indivíduo-grupo-classe e postagem das narrativas, indicariam que a atividade de ensino do professor formador poderia vir a ser geradora da atividade do estudante, ou seja, poderiam vir a criar neles motivos para a sua atividade.

Do aprender ao aprender a ensinar

Nesta categoria, analisamos excertos que nos permitem inferir que as atividades desenvolvidas foram geradoras de necessidades e motivos para ensinar, aprender e aprender a ensinar geometrias.

Ao lermos o questionário, 16 licenciandos, Q1, Q2, Q3, Q5, Q6, Q7, Q10, Q11, S2, S3, S4, S5, S10, S11, S13 e S16, afirmaram que seus motivos para cursar a disciplina estavam relacionados à prática docente e, dentre eles, Q1, Q7, Q10, S2, S4, S5, S11 e S13 já eram professores da educação básica. Assim, podemos afirmar que estes alunos tinham motivos eficazes para cursar a disciplina, uma vez que havia coincidência entre os motivos deles e os da professora. A análise das narrativas desses licenciandos mostra que a preocupação com a prática docente continua permeando as reflexões desses 16 alunos durante toda a disciplina.

As narrativas dos licenciandos S1, S6, S7, S8, S9, S14, S15, S17 e S19 nos mostraram que houve um movimento em seus motivos, relacionados aos seus objetivos em cursar a disciplina, uma vez que no questionário apresentaram motivos compreensíveis para realizar a disciplina e esses motivos se transformaram em motivos eficazes no decorrer do ano. O movimento dos motivos pode indicar uma possível mudança em sua futura prática docente, porque a transformação dos motivos ocorre na própria prática do sujeito, a partir do momento em que ele atribui sentido às atividades.

Os licenciandos Q4, Q8, Q9, S12 e S18 não apresentaram reflexões em nenhuma narrativa que nos permitam afirmar que possuíam preocupações com sua futura prática docente. Até o término das disciplinas, nenhum desses licenciandos tinha atuado como professor da educação básica.

A unidade de análise das narrativas, preocupação com a prática, pode ser encontrada nas narrativas referente às AE: AE2, AE4, AE5, AE6, AE7, AE8, AE9, AE10, AE11. Já, a unidade de análise das narrativas, *(*re)significação de conceitos, pode ser encontrada nas narrativas referente às mesmas dez AE. Assim, podemos inferir que essas AE vieram a ser uma AOE, como o exemplo da narrativa da licencianda S3 que aponta para a necessidade de aprender o conteúdo e aprender a ensinar.

> S3-N8: Acredito que a maior dificuldade e preocupação nos dias de hoje é ensinar de modo significativo e chamar a atenção do indivíduo para discutir a respeito da matemática. Nas perspectivas que temos contato, a ideia principal é responsabilizar o aluno de sua aprendizagem de maneira que este construa o seu conhecimento. Na minha visão faz todo sentido, pois somos alunos e com certeza já passamos por isso: o professor fala a aula inteira e você só entende depois de pesquisar, resolver

> vários exercícios e tirar dúvidas, mesmo assim dependendo o contexto que nos deparamos, não conseguimos resolver. Há uma necessidade de se ter contato com uma parte mais significativa do conceito para poder generalizar o conceito. Percebemos nas discussões que uma preocupação dos estão formando em professores é em se deparar com a realidade da sala de aula e como lidar com os problemas. A formação certamente ajuda, porém nada se aproxima melhor que a prática. O professor sai formado com uma bagagem de conteúdos, mas encontra uma sala onde os alunos não querer aprender, não veem sentido em aprender e tem aquela famosa frase na cabeça: "matemática é muito difícil, quase ninguém aprende", e assim são poucos que se interessam por essa ciência. O professor recém-formado, conhecedor das teorias de ensino e aprendizagem, até tenta aplicá-las em sala de aula, mas por não tê-las visto em prática, ou seja, a formação do professor é muito teórica, não consegue se organizar para trabalhar e acaba por desistir e passa a dar aula como seus professores davam. Contudo creio que por enquanto o que temos que ter em mente é a vontade de mudança, ter claro como eu poderia torna mais significativa a minha prática. Acho ser um bom começo.

A nosso ver, as AE possibilitaram aos licenciandos atribuir novos sentidos e significados aos elementos constitutivos da organização do ensino, como indicam as reflexões de Q2 e Q7:

> Q2-N8: Para mim a função de um bom professor, além de passar aos alunos o conteúdo específico, ele precisa planejar estratégias, com criatividade,

> para resolver os problemas que vão surgindo na sala de aula no dia a dia. Mas há algumas questões que o professor sozinho não vai conseguir resolver e nem é função dele resolver sozinho, pois há, ou melhor, pela lei em toda escola deve ter pedagogos, psicólogos, profissionais capacitados a algumas questões específicas dos alunos, o professor precisa sim, observar esses alunos e se necessário pedir ajuda aos demais profissionais.
>
> Q7-N7: Entretanto, essas discussões são interessantes, mas ao mesmo tempo nos faz repensar sobre o que realmente sabemos e se sabemos alguma coisa, não temos ainda uma visão que nos permite analisar minuciosamente detalhes que podem fazer a diferença para o aprendizado dos alunos. Eu acho válido quando surgem essas discussões que envolvem conceitos que serão trabalhados com os alunos na sala de aula, pois acredito que preparar uma aula é fácil, mas pensar em uma maneira que vai realmente esclarecer certos conceitos para os alunos de modo a sanar a sua dúvida é muito difícil e essas discussões me ajudam a ter uma visão mais ampla sobre coisas que antes eu não tinha capacidade para visualizar.

A unidade de análise das narrativas intitulada: A preocupação com as notas e com as avaliações permite-nos afirmar que os alunos, muitas vezes, privilegiam as notas nas avaliações em detrimento do saber, como mostra a narrativa de S10.

> S10-N8: O aluno entra na escola com o pensamento de tirar a notas boas para passar de ano, e não se preocupa com a matéria, pois para ele, a sociedade ensina que ele deve concluir o curso e

> não a aprender todos os conteúdos para sua profissionalização.

A unidade de análise das narrativas, intitulada Reflexões, indica que os licenciandos mostraram-se preocupados com a escola e sua organização. O licenciando S13 reflete acerca do professor de matemática, um sujeito pensante, capaz de um pensar epistêmico (LIBÂNEO, 2004a,), que seja capaz de ir além de saber coisas, que seja capaz de apropriar-se do momento histórico de modo a pensar historicamente essa realidade e reagir a ela.

> S13-N8: No mundo atual, o professor de matemática deve ser capaz de discutir qualquer assunto, pois somente o conhecimento acadêmico não é suficiente para formar um profissional. Assim, percebemos o quanto a prática não tem sido relacionada com a teoria que se aprende nas salas de aula no Ensino Superior. E o que fazer para mudar isso?

Temos de considerar, ainda, que, de acordo com Libâneo (2004b), a didática precisa comprometer-se com a qualidade cognitiva das aprendizagens e esta, por sua vez, está associada à aprendizagem do pensar.

A categoria “Do aprender ao aprender a ensinar” leva-nos a afirmar que, para alguns alunos, o desenvolvimento das AE, a partir da dinâmica estabelecida, tornou-se uma AOE, pois indicaram o elo entre o ensino e a aprendizagem, com vistas à humanização dos sujeitos envolvidos no trabalho educativo.

Considerações finais: implicações para o ensino de matemática

Na busca de analisar se as AE de geometrias na perspectiva lógico-histórica, desenvolvidas a partir da dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativa, podem se configurar como unidade entre ensino e a aprendizagem (AOE) na formação inicial de professores, deparamo-nos com esclarecimentos, teorizações, perguntas, inquietações, dúvidas, contradições e incertezas. Com isso, modificamo-nos enquanto pesquisadora e professora e modificamos também os licenciandos que foram sujeitos da pesquisa.

Pensando nas ações em sala, organizadas a partir de objetivos, conteúdos e estratégias de ensino, rompemos com um modelo de formação de professores de matemática em geometrias que privilegia apenas o rigor e o encaminhamento lógico de conceitos e proposições e que se aproxima da concepção de uma educação humanizadora, ou seja, que permite conhecer o homem como ser histórico. Com isso, objetivando, pois, ensinar conceitos e formar professores, organizamos as disciplinas não apenas pensando na apropriação dos conhecimentos, mas também nas orientações e discussões acerca do ensinar e na formação de cidadãos participantes de todas as instâncias da vida social contemporânea e preparados para uma leitura crítica das transformações que ocorrem em escala mundial. Com vistas a permitir uma formação não alienante e na qual os sujeitos em formação possam se apropriar do conhecimento historicamente construído, discutir e pensar sobre seus futuros objetos de trabalho.

Na categoria "Do aprender ao aprender a ensinar", apresentamos os movimentos dos motivos que levaram os licenciandos a cursar a disciplina. Inferimos que, de maneira geral, as AE foram geradoras de motivos para atividade de aprendizagem, ou seja, elas geraram e promoveram motivos nos alunos que os levaram à apropriação do conhecimento e à compreensão de como trabalhar com esses conhecimentos na futura prática docente. Indicou-se, com isso, o elo entre o ensino e a aprendizagem, com vistas à humanização dos sujeitos envolvidos no trabalho educativo.

As AE desenvolvidas nas disciplinas, e vivenciadas pela dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas, foram geradoras de objetivos e motivos para ensinar, aprender e aprender a ensinar geometrias. Com isso, inferimos que as AE vieram a ser uma AOE, uma vez que houve a unidade entre a atividade de ensino e a atividade de aprendizagem. Ou seja, as AE se tornaram uma AOE, pois desencadearam a formação do estudante, a nossa formação enquanto professoras e enquanto pesquisadoras; desencadearam a formação do estudante, pois permitiram a apropriação do conhecimento teórico e reflexões acerca de como ensinar esse conhecimento teórico na prática docente. De maneira geral, entendemos que as AE se apresentaram como uma possibilidade de romper com a concepção de que o dever do educador é conduzir o educando à memorização mecânica de conteúdo; possibilitaram a nossa formação como professora, pois mobilizaram movimentos nos motivos da atividade docente, o que acarretou em mudanças na organização do ensino e nas ações que se concretizaram na atividade pedagógica e permitiram a nossa formação enquanto pesquisadora, pois a utilizamos como uma fonte de pesquisa e como uma estrutura que nos possibilitou responder as nossas questões iniciais e formular outras. Durante esta pesquisa, surgiram novas inquietações, críticas à própria prática e são essas inquietações e críticas que nos movimentarão e alimentarão a busca por teorizações que levarão a um novo movimento da prática.

Corroboramos Libâneo (2004a), segundo o qual, as mudanças na maneira de aprender afetam as formas de ensinar. Foi possível mostrar que são possíveis outras perspectivas de ensinar geometrias. Ou seja, criamos condições para que o professor em formação pudesse rever os motivos que os moviam a cursar a disciplina e assim passaram a atribuir novos sentidos à organização do ensino, no caso de quem já era professor, e novos sentidos para a futura organização do ensino, para quem, até o término das disciplinas, não era professor.

Referências

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, 1999.

FERREIRA, Erica da Silva Moreira. **Quando a atividade de ensino dá ao conceito matemático a qualidade de educar.** 129 f . Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

LEONTIEV, Alexis Nikolaevich. **O desenvolvimento do psiquismo.** São Paulo: Moraes, 2010.

LEONTIEV, Alexis Nikolaevich; VIGOSTSKY, Lev Semenovich; LURIA, Alexander Romanovich. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** São Paulo: Ícone, 2006.

LIBÂNEO, José Carlos. A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade. **Revista Educar**, Curitiba, n. 24, p. 113-147, 2004a.

LIBÂNEO, José Carlos. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-Cultural da Atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 27, p. 5-25, 2004b.

LIBÂNEO, José Carlos. Reflexividade e formação de professores: outra oscilação do pensamento pedagógico brasileiro? In: PIMENTA, Selma Garrido; GHEDIN, Evandro (orgs.). **Professor reflexivo no Brasil**: gênese e crítica de um conceito. São Paulo: Cortez, 2006, p. 53-80.

LIBÂNEO, José Carlos. **Adeus professor, adeus professora**?: novas exigências educacionais e profissão docente. São Paulo: Cortez, 2010.

MORETTI, Vanessa Dias; MOURA, Manoel Oriosvaldo de. O sentido em movimento na formação de professores de matemática. **Zetetiké,** Campinas, v. 18, n. 34, p.155-180, 2010.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de et al. Atividades Orientadoras de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, 2010.

SOUSA, Maria do Carmo de. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica**: um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental. 2004. 308 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

Capítulo 3

Uma experiência na formação do docente em matemática para a utilização pedagógica das tecnologias da informação e comunicação

Rosefran Adriano Gonçalves Cibotto
Rosa Maria Moraes Anunciato Oliveira

Reflexões a respeito da experiência formativa[1]

Neste texto explanamos sobre uma experiência realizada na formação inicial de docentes em matemática para que esses possam fazer uso pedagógico das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC[2]) em seu dia a dia, a qual denominaremos doravante apenas de experiência formativa. Essa experiência formativa permitiu aos futuros professores participarem de um processo de seleção de quais TIC poderiam utilizar, em seguida, planejar como ministrar aulas utilizando o laboratório de informática e, por fim, ministrarem suas

---

[1] Este trabalho está vinculado à pesquisa de doutorado, no Programa de Pós-Graduação em Educação – UFSCar, do primeiro autor, e teve apoio da Fundação Araucária, por meio de bolsa de estudos vinculada ao Programa de Apoio à Capacitação Docente das Instituições Estaduais de Ensino Superior – PCD-IEES.

[2] Embora existam diversos termos para indicar as atuais tecnologias da informação – tais como Novas Tecnologias da Informação e Comunicação (NTIC) e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) –, a literatura internacional continua utilizando ICT (Information and Communications Technology), a exemplo do recente estudo de Chai, Koh e Tsai (2013). Desse modo, o termo TIC, por nós empregado, tem sido utilizado com recorrência e denota as tecnologias relacionadas a computadores em seus diversos formatos, *softwares*, vídeos digitais e sites. Assim, ao longo do texto utilizaremos o termo TIC ou, simplesmente, tecnologia, envolvendo esse contexto todo.

aulas naquele ambiente.

Os cursos de formação inicial de professores, geralmente estão distantes das experiências das escolas de Ensino Fundamental e médio, embora veiculem prescrições sobre como devem ser as práticas pedagógicas ideais. Esse impasse entre a formação oferecida pela licenciatura e o observado nas escolas tem sido apontado por estudantes como um dos problemas mais persistentes da sua formação.

Isso nos leva a refletir sobre o lugar que a experiência ocupa (ou pode ocupar) nas práticas formativas. Antes de detalharmos como realizamos esse processo, fizemos um questionamento: Por que essa experiência formativa tem as características que ela tem? Essas características podem ser condensadas em "colocar a mão na massa" e refletir sobre essa ação, ou seja, selecionar quais tecnologias utilizar, vivenciando as possibilidades e limitações a partir do uso na prática de cada uma delas e "antecipar o que pode acontecer", efetuando um detalhado planejamento de como utilizar pedagogicamente as TIC e, em seguida, lecionando com uso prático em aulas-piloto, refletindo sua finalidade em todo o processo de ensino-aprendizagem.

Essas características possuem fundamento, posto como pano de fundo do cenário da experiência: Existem problemas nos cursos de graduação de formação inicial docente. São raros os casos de cursos de formação inicial de professores que propiciam aos futuros docentes, em disciplinas regulares, formação para usarem pedagogicamente as tecnologias na prática (GATTI, 2010). Consideramos que, para esse tipo de conhecimento, o aluno precisa aprender fazendo, compreendemos deste modo que, se o curso de formação inicial não oferece ocasiões para ele fazer, ele não aprende.

Assim, a formação inicial tem uma finalidade fundamental, mas ela possui limites e, infelizmente, na prática, ela tem sido mais limitada do que uma formação inicial ideal poderia propiciar. Prova disso é a diversidade de estudos sobre esse tema constantemente publicados. Dificuldades com o uso pedagógico das tecnologias é apenas mais um nó nessa imensa teia relacionada ao ensino.

Retomando ao nosso estudo, além dessa questão posta inicialmente e efetuando reflexões a respeito da importância da prática no ambiente de ensino, embasamo-nos em questionamentos a respeito de: Como geralmente é a formação inicial dos professores? Quantas vezes, dentro dessa formação, os estudantes, futuros professores, têm oportunidade de praticar e pensar o ensino? Tais reflexões é que nos instigaram a definir as características básicas da experiência formativa de propiciar aos futuros professores a possibilidade de colocarem a “mão na massa” e de “antecipar o que pode acontecer”.

Ao elaborarmos a estrutura da experiência formativa, vimos a necessidade de trabalhar com um conteúdo específico para que os futuros professores pudessem vivenciar na prática como escolher e usar pedagogicamente a tecnologia ao longo de suas carreiras docentes, contudo o conceito e a estrutura do processo ao qual foram submetidos seriam similares para tratar de qualquer outro conteúdo, mesmo em área distinta da matemática.

Justifica-se, então, que haja tal preocupação com a formação inicial do docente, na em que as TIC podem fazer parte dos procedimentos de ensino-aprendizagem do conteúdo. Esse fato permite ao futuro professor adquirir experiência e vivência de ferramentas tecnológicas, formação docente essa que, consequentemente, poderá ser utilizada durante sua carreira docente.

A partir do pressuposto de que as tecnologias podem ser utilizadas como instrumentos facilitadores e potencializadores do processo de ensino-aprendizagem, com o uso do computador para melhorar os sistemas ou criar ambientes de trabalho nas escolas (CORRADINI; MIZUKAMI, 2013), o tema proposto tem como princípio explorar as TIC existentes, que possam ser utilizadas para as atividades de ensino-aprendizagem e para investigar e compreender como as tecnologias podem ser aplicadas à educação. Assim, propiciar ao futuro professor que saiba ensinar matemática de maneira imbricada com a tecnologia, ele aproveitará a realidade onde é crescente o uso e o conhecimento de recursos digitais por parte dos professores e, em especial, da juventude, como apontam alguns trabalhos de Marc Prensky (2001, 2009) ao referir-se ao nativo digital e ao *homo sapiens digital*.

De acordo com Fey (2011), a maioria dos atuais professores está incluída nessa categoria de imigrante digital, onde poucos deles têm intimidade com as tecnologias digitais que deveriam ser utilizadas em seu cotidiano. Conforme o autor, alguns desses professores são contrários ao seu uso no ambiente educativo. Borba e Penteado (2012) corroboram as afirmações de Fey (2011), pois, segundo eles, alguns professores abandonam a possibilidade de uso da tecnologia, pautando-se em questões baseadas no fato de que computadores não são para a escola, não estão preparados para a plena utilização das TIC, ou que a escola não oferece condições de trabalho.

Um desafio ao planejarmos esta pesquisa foi propiciar ao futuro professor conhecimentos em tecnologias suficientes para superarem o receio de entrar em sala de aula ou laboratório de informática. Na realidade, esses são ambientes onde, muitas vezes, os alunos possuem maior domínio de recursos tecnológicos que o docente. É comum, com relação à tecnologia, os estudantes saberem mais que o professor, que deve ter o conhecimento pedagógico de como utilizar as TIC para as suas aulas com a finalidade de canalizar o conhecimento de sua turma, almejando que eles possam construir o conhecimento a partir do estudo do conteúdo com o auxílio das tecnologias.

Diante disso, a realização da experiência formativa passou por diversos momentos, incluindo a definição do conteúdo a ser trabalhado, o debate teórico a respeito do uso pedagógico de laboratórios de informática nas escolas e visita a uma escola com um laboratório de informática novo fornecido pelo MEC. O cerne da experiência formativa consistiu em duas grandes partes. A primeira representada pelo processo realizado para a seleção de tecnologias a serem utilizadas para o ensino de funções quadráticas, constituídas por sites, *softwares* e vídeos. Na segunda parte, após os participantes terem realizado a seleção de quais tecnologias iriam utilizar, foram elaboradas e realizadas microaulas[3] sobre esse conteúdo com a utilização pedagógica do *software* GeoGebra.

[3] Microaulas é o termo que utilizamos para designar aulas práticas ministradas pelos licenciandos à sua própria turma de estudantes, com horário reduzido, sob a supervisão de um professor.

Faremos a seguir um breve relato dos 20 encontros realizados durante o ano de 2013 com os 12 alunos do quarto ano de um curso em licenciatura em matemática. No primeiro encontro apresentamos nossa proposta de trabalho, a ser realizada com eles durante aquele ano e como ela poderia contribuir para a formação da turma.

Posteriormente, no segundo encontro, disponibilizamos um artigo relacionado ao uso de laboratórios de informática para o ensino (GUIMARÃES; SENA, 2010). Dividimos a sala em quatro equipes e deixamos uma questão para responderem e debatermos no encontro seguinte. A primeira questão foi: De acordo com Guimarães e Sena (2010), a prática pedagógica utilizada no laboratório de informática nem sempre promove, da melhor maneira possível, o processo de ensino-aprendizagem. Justifique embasado no texto e em seus conhecimentos, por que isso ocorre e sugira como o laboratório pode ser mais bem utilizado. A segunda questão foi: De acordo com as autoras, como se caracteriza o uso do laboratório como espaço de fuga para os professores? E como se caracteriza seu uso para simples realização de pesquisas? Vocês têm conhecimento de acontecimentos semelhantes, que poderiam se enquadrar nessas categorias? Especifiquem. A terceira questão foi: De acordo com o texto e seus conhecimentos, como é o uso do laboratório de informática quando, de fato, as ferramentas computacionais são exploradas pelos professores? Vocês têm conhecimento de acontecimentos semelhantes, que poderiam se enquadrar nessas categorias? Especifiquem. A quarta questão foi: De acordo com o abordado no texto, em conjunto com suas opiniões, como deveria ser a formação pedagógica do professor de matemática a respeito da utilização da tecnologia digital em suas práticas para a Educação Básica? Quais *softwares* e recursos computacionais deveriam ser estudados ao longo da formação inicial docente (Licenciatura em Matemática)? Os alunos foram questionados também em qual das três categorias apresentadas no texto eles se enquadram.

Para desenvolver as atividades que planejamos para serem realizadas ao longo do ano, seria necessário escolhermos um conteúdo ao qual poderíamos centrar nossos esforços. Esclarecemos esse ponto aos alunos acadêmicos. Pensamos em um único conteúdo sobre o qual todos eles tivessem domínio. Um importante ponto levado em consideração foi a delimitação de um tema que pudesse ser abordado em uma quantidade reduzida de aulas na escola e em que os futuros professores poderiam realizar suas práticas, durante o estágio supervisionado. Essa precaução era pela dependência de horário para a utilização do laboratório de informática da escola e pela disponibilidade que o professor de matemática terá em ceder suas aulas para que os licenciandos as pudessem utilizar, além da limitação de carga horária de regência das aulas durante o estágio supervisionado. Surgiram algumas propostas e a turma, na semana seguinte, em consenso, decidiu trabalhar com o conteúdo de funções quadráticas e suas aplicações. Como se sabe, esse conteúdo pode ser revisado e ampliado no ensino médio, onde esta turma faria a regência de suas aulas.

No encontro seguinte, realizamos uma vasta discussão a respeito do artigo anteriormente disponibilizado. Vinculamos às experiências que os acadêmicos tiveram utilizando laboratórios de informática, em especial com as experiências dos que já lecionam. Na oportunidade, foi solicitado a eles que realizassem uma pesquisa a respeito de *softwares*, vídeos e sites que pudessem ser usados para o ensino de funções quadráticas[4]. Assim, realizaram, inicialmente, uma pesquisa geral com todas as tecnologias englobando sites, vídeos e *softwares* que pudessem ser úteis para ensinar funções quadráticas por meio do uso pedagógico dessas mídias. Os licenciandos trouxeram o resultado da pesquisa no encontro subsequente. Propusemo-nos a fazer uma análise dos resultados e trazer um *feedback* a eles, comentando o resultado de suas pesquisas já no próximo encontro. Solicitamos uma pesquisa documental na qual verificamos o que poderia ser usado nas escolas públicas ou privadas, por meio da observação em estruturas físicas dos laboratórios de informática de alguns colégios. Para uma visão geral,

[4] Na próxima seção esclareceremos como foi a realização desta pesquisa.

foram investigados editais e documentos oficiais, para esses futuros professores se inteirarem de como funciona a aquisição de equipamentos nas escolas públicas, o que pode ser instalado e a possibilidade de uso que tais computadores permitem. Assim, houve a oportunidade de terem uma visão geral do que existe em um laboratório, desconsiderando a possível defasagem entre o existente e a tecnologia de ponta, que evolui a cada dia.

O quinto encontro com a turma foi distinto dos demais. Fomos conhecer um laboratório de informática, em um colégio próximo à universidade, tratando-se de laboratório recém-fornecido pelo Ministério da Educação a poucas escolas da região. O laboratório possui 15 microcomputadores dotados de sistema operacional *Linux* Educacional[5] e diversos *softwares* específicos para ensino de variadas disciplinas, inclusive alguns para conteúdos matemáticos. Os alunos tiveram a oportunidade de explorar os *softwares* existentes, a exemplo do *KTurtle*, para a linguagem LOGO, o *KMPlot*, além de diversos links de sites educacionais previamente designados para acesso nesses computadores.

Do sexto ao décimo quinto encontro foi realizado o processo de seleção de TIC, que consistiu em criar um filtro das tecnologias encontradas na pesquisa inicial, para determinar quais seriam as mais viáveis para a prática na escola. Foram realizadas diversas trocas de ideias e atividades práticas nas quais os licenciandos utilizaram as TIC resultantes da pesquisa de *softwares*, vídeos e sites efetuada anteriormente. O pesquisador organizou o resultado de todos os participantes contabilizando seis sites, sete vídeos[6] e 16 *softwares*. No momento de filtrar, foi considerada a documentação da fase anterior, para saber a estrutura disponível nos colégios, contemplando questões técnicas, indicando se a mídia podia ou não ser utilizada nos computadores ou infraestrutura lá existentes e idioma disponível para a

[5] O *Linux* Educacional é um projeto do governo federal que busca o melhor aproveitamento dos ambientes de informática nas escolas por meio da utilização de *softwares* livres. Nesse caso o sistema operacional e diversos aplicativos nele instalados. Mais informações em: http://linuxeducacional.c3sl.ufpr.br/.

[6] O que contamos como um dos sete vídeos é um site composto por diversos vídeos sobre funções quadráticas. Classificamos como apenas um para simplificar o processo de descrição.

mídia. Por fim, foi ponderada a questão pessoal, no sentido das considerações que o futuro professor destacou, fundamentando se gostou ou não de trabalhar com aquela tecnologia. Ponderando sua percepção sobre a facilidade de uso e de seu aluno aprender a usar a ferramenta, sua utilidade para atividades de estudo daquele conteúdo, as limitações pedagógicas, prós e contras de cada uma delas, observadas pelo uso na prática de todas as 29 mídias que os participantes encontraram na pesquisa inicial. O objetivo foi classificar as tecnologias com relação às que seriam propícias ou não para o ensino de funções quadráticas, de modo a eliminar as que não satisfizessem os critérios técnicos ou não agradassem devido às dificuldades de aprendizado para usar a ferramenta ou serem difíceis de utilizar, em especial quando se pensa em um estudante do Ensino Básico.

No 16º encontro, os participantes iniciaram a segunda e última grande parte de nossa experiência formativa: a elaboração e execução de microaulas. Cada dupla de participantes ficou encarregada de planejar, em detalhes, como iriam trabalhar o conteúdo de funções quadráticas com o uso pedagógico de TIC. O planejamento deveria conter fundamentos considerando a relevância dos coeficientes a, b e c da forma genérica da função quadrática e opcionalmente os coeficientes a, k e h da forma canônica dessas funções. O conteúdo precisaria ser planejado passando por esses fundamentos e ampliado até chegar a aplicações interdisciplinares dessas funções. O planejamento de aula permitiu a eles visualizarem a aula, bem como a sequência e didática a ser utilizada para o ensino. Eles necessitaram elaborar e resolver os exercícios antes da aula prática, a fim de compreenderem como funcionaria a dinâmica da aula, quais as dificuldades no uso do *software* pelo professor e pelos alunos, prevendo o que poderia ocorrer durante a aula no laboratório de informática[7].

[7] Detalhes de como os alunos realizaram o planejamento e executaram a regência das microaulas estão disponíveis logo adiante, na seção planejamento e execução das microaulas.

Em todos os encontros seguintes foram realizadas microaulas. Para essas microaulas práticas, pelo limite de horário, duas duplas contemplaram questões sobre os fundamentos e as demais objetivaram aplicações que abrangeram questões financeiras, da física e da engenharia. Assim, as duplas praticaram o ensino com o uso pedagógico da tecnologia, bem como uma reflexão crítica sobre o andamento de cada uma. O 20º e último encontro com a turma foi realizado em 10 de setembro de 2013.

A seguir, detalharemos como foram realizados os dois grandes momentos da experiência formativa. O primeiro foi relativo ao processo utilizado para a seleção de TIC para o estudo de funções quadráticas. O segundo contemplou como os licenciandos elaboraram o planejamento das microaulas e como elas foram realizadas.

O processo de seleção de tecnologias

Uma vez decidido, pelos participantes, que iríamos trabalhar com o conteúdo de funções quadráticas, os alunos, em duplas, começaram a primeira atividade pensando em quais TIC poderiam ser utilizadas para o estudo desse conteúdo. Solicitamos que pesquisassem tecnologias envolvendo vídeos disponíveis na internet, *softwares* e sites que pudessem ser usadas pedagogicamente para o ensino das funções quadráticas.

Ao receber o retorno, observamos que, subtraindo os repetidos, a turma encontrou um total de seis sites, sete vídeos e 16 *softwares*.

Em um segundo momento foi verificado quais tipos de tecnologias poderiam ser utilizados nas escolas. Para isso, os participantes realizaram uma pesquisa bibliográfica por meio de um levantamento de documentos oficiais do MEC e do Estado do Paraná[8], isso para terem acesso aos editais referentes à infraestrutura que podia existir nos laboratórios de informática das escolas.

Tivemos, contudo, cautela de conscientizar os licenciandos sobre a

[8] Estado do Paraná por ser o local onde os participantes da experiência formativa moram e estudam.

hipótese de que nem sempre tudo aquilo existiria em uma escola pública, isso pela limitação dos editais e à participação da escola, governos estaduais ou municipais, nesses editais.

Foi solicitado que realizassem outra pesquisa, agora para verificar qual era a infraestrutura disponível nas escolas públicas e particulares.

Ao conversar com os licenciandos, percebemos a dificuldade que eles estavam enfrentando em encontrar documentos oficiais, em especial na esfera federal, conforme solicitado. Diante dos fatos, ajudamo-los na pesquisa enviando-lhes diversos links de documentos, como sugestão de apoio à pesquisa.

Alguns alunos sugeriram a possibilidade de visitarem as escolas para verificarem, *in loco,* que tipo de estrutura possuíam, bem como o que poderia vir a ser adquirido em breve. Essa informação deveria ser fundamentada por meio de uma entrevista com algum responsável pela escola ou pelo laboratório, para atestar o que foi verificado. Dessa maneira, não deveria ser inserido um critério apenas com base na observação de laboratórios, pois a realidade quando da aquisição do recurso tecnológico pode ser diferente da atual, levando em conta que mudanças de governo podem acarretar novas regras.

Como resultado, conseguiram, de maneira geral, ter noção a respeito do que podia existir no laboratório de informática da escola. Registramos haver computador tradicional, *FourHead*, aquele 4 em 1[9], projetor, Computador Interativo[10], lousa digital, dentre outras tecnologias, e, quanto ao sistema operacional, em geral o *Linux* – alguns com *Linux* Educacional[11] e outros com versões não especificadas.

---

[9] O *FourHead* é um sistema usado para baratear os custos de instalação de laboratórios de informática, no qual cada computador passa a ser utilizado por até quatro pessoas simultaneamente, de modo que, em um único computador são ligados quatro monitores, quatro teclados e quatro mouses. Cada conjunto de monitor, teclado e mouse funciona sem interferir no trabalho dos demais.

[10] O Computador Interativo é um projetor em conjunto com um computador em uma única peça portátil. Mais informações a respeito podem ser acessadas pelo portal de compras do FNDE em http://www.fnde.gov.br/portaldecompras/index.php/produtos/computador-interatvo-projetor.

[11] O *Linux* Educacional é um projeto do governo federal desenvolvido pela Universidade Federal do Paraná que utiliza *software* livre potencializando o uso das tecnologias educacionais. Maiores informações e o download do programa de instalação estão disponíveis no endereço eletrônico http://linuxeducacional.c3sl.ufpr.br/.

A última etapa do processo de seleção foi a criação de um filtro para chegarmos a quais tecnologias seriam utilizadas pelos participantes. Para a construção desse filtro consideramos o resultado da análise documental como sendo um critério técnico sobre o que existe de infraestrutura nos laboratórios das escolas, a questão técnica referente à compatibilidade das TIC com o sistema operacional *Linux*, idiomas e tipo de licença para uso. Também foi considerada a opinião pessoal referente ao que os licenciandos avaliaram quando utilizaram aquela determinada tecnologia, no sentido de considerarem-na útil ou não, seus prós e contras, porque usariam ou não usariam.

De posse das informações dos *softwares*, sites, vídeos, resultado da documentação relativa aos laboratórios de informática da rede pública estadual e federal, elaboramos um quadro para resumir os dados e facilitar análise e seleção das tecnologias a serem utilizadas.

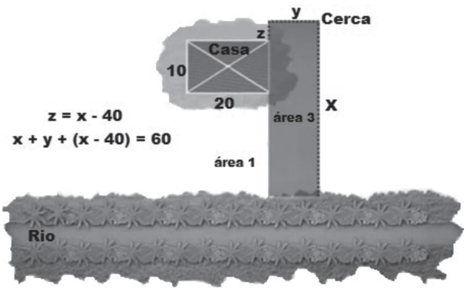
Esse quadro possui diversas questões para filtrar as tecnologias e selecionar as que seriam úteis para o estudo das funções quadráticas. Algumas questões foram elaboradas com respostas pré-formatadas e outras abertas. Por fim, foram agrupadas em: características, exigências e resultados.

Para que os participantes não gastassem tempo procurando e fazendo o *downloa*d dos *softwares* encontrados na primeira parte da pesquisa e propiciar a eles realizarem o preenchimento da tabela, deixamos uma cópia da instalação de todos os *softwares* para Windows, resultantes da pesquisa, com cada dupla. Cabe esclarecer, que todos os arquivos de instalação oferecidos estão disponíveis na internet e não violam qualquer lei de direitos autorais nem se configuram como pirataria, pois são instalações de versões de demonstração (para os *softwares* proprietários) ou de *softwares* livres. Disponibilizar a instalação dos *softwares* teve por objetivo facilitar e agilizar aos estudantes a análise do *software*, em especial análise relacionada às questões que dependem de experiência de uso.

Para fomentar a discussão relacionada aos vídeos ou videoaulas, o pesquisador apresentou aos participantes um vídeo[12] cuja imagem de um trecho é apresentada na Figura 1, que não se configura como aula ou resolução de exercícios envolvendo as funções quadráticas. O vídeo apresentado instiga o aluno a pensar e a elaborar uma função quadrática para resolver um problema relacionado à melhor forma de cercar uma propriedade aproveitando a margem de um rio e a casa do sitiante. O vídeo expõe a dificuldade desse sitiante e deixa o desafio para a turma resolver.

A partir da exibição desse vídeo efetuamos discussão a respeito de que tipo de vídeo é propício para a utilização em sala de aula ou laboratório de informática, uma vez que há uma infinidade de vídeos disponíveis na grande rede. Nesse contexto, o participante 5[13] observou: "Esta discussão é muito interessante, pois quando falamos de vídeos, podemos utilizá-los em qualquer contexto para qualquer conteúdo". O participante 2 complementou: "Não conhecia este vídeo, tinha visto apenas aulas envolvendo a resolução de exercícios, normalmente de vestibular. Achei muito interessante". Posteriormente, os alunos foram novamente conscientizados sobre a necessidade do correto preenchimento do quadro e sua importância para os próximos passos.

Figura 1: Trecho adaptado do vídeo O Problema da Cerca da Série Matemática na Escola



Fonte: Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas

[12] O vídeo apresentado está disponível no endereço eletrônico http://m³.ime.unicamp.br/recursos/1160. Acesso em: 10 abr. 2013.

[13] A denominação de Participante 1, 2, 3, ...e 12 foi a opção de anonimato adotada pela própria turma.

Em seguida, geramos um DVD, para disponibilizarmos aos alunos, com a instalação dos *softwares* para Windows diretamente em uma máquina virtual rodando o *Linux*, por meio do *Wine*[14]. Os alunos instalaram, em seus computadores pessoais, a máquina virtual contendo o *Linux* e todos os programas nativos do próprio *Linux*, bem como os programas para Windows. O DVD continha os *softwares* encontrados pelos alunos para trabalhar o ensino de funções quadráticas. Como esses *softwares* foram disponibilizados para os alunos em um único pacote, aproveitamos para inserir outros programas que consideramos interessantes e utilizáveis para o ensino de outros conteúdos matemáticos. Com isso o DVD possuía os seguintes *softwares* para funções quadráticas: *AlgoSim, Archim, Casyopée, CrispyPlotter, FunctionGrapher, GeoGebra, Gnuplot, Grapes, Graph, GraphMonkey, Graphmatica, Kalgebra, KmPlot, MathGV, nPlot, Parabolas* e *WinPlot*. Os demais programas incluídos são: *Kig, KTurtle, TurtleArt, CaRMetal, MathWar* e *Gally*. Foram inseridos o *Linux Ubuntu* 13.04, versão atual do sistema operacional Ubuntu naquele momento, todos os programas supracitados, bem como o *software VirtualBox*. O *VirtualBox* é um programa gratuito que permite instalar e executar um sistema operacional em uma máquina virtual. Para esse caso, permite rodar o *Linux Ubuntu* dentro do Windows. Para facilitar as instalações, ofertamos, no próprio DVD, um manual dos procedimentos a serem seguidos para as instalações e configurações necessárias.

Assim, foi disponibilizada, no DVD fornecido a cada dupla, a possibilidade de rodar o *Linux Ubuntu* no computador de cada um, em que está com o sistema operacional Windows. Dessa maneira, eles têm nessa máquina virtual o mesmo ambiente que existe no laboratório. Os demais programas próprios do *Linux*, ou instalados por meio do *Wine*, poderiam ser instalados nos laboratórios de informática da instituição ou das escolas onde os participantes da experiência formativa fariam

[14] O *Wine* (*WineIs Not* na *Emulator*) é um *software* que permite executar programas para *Windows* no *Linux*. Ele funciona como uma camada (semelhante a um emulador) que expõe uma API (Interface de Programação de Aplicativos) compatível com a do Windows ao serem executadas as diferentes funções (para que os programas sejam corretamente interpretados pelo sistema operacional *Linux*).

seus estágios ou atuarão profissionalmente. Basta que o responsável pelo laboratório tenha conhecimento a respeito de instalação de programas no *Linux* e no *Wine*, o que é relativamente simples para um laboratorista.

No momento seguinte, após a instalação do conteúdo do DVD nos computadores dos alunos, fizemos uso dos *softwares* juntamente com os alunos, para que a turma determinasse quais *softwares* de fato seriam usados em suas aulas práticas de ensino de funções quadráticas.

Iniciamos um novo encontro com o objetivo de efetuar uma análise, em conjunto com todos os alunos, de cada *software* pré-selecionado. O pesquisador forneceu aos alunos um formulário para efetuarem a análise desses *softwares*. Esse formulário consiste do nome de cada *software* na sequência em que faríamos a análise. Iniciamos pelos *softwares* para Windows em ordem alfabética. Posteriormente faríamos o mesmo com os *softwares* para instalação no *Linux*. Para cada um deles, as duplas deveriam responder, justificadamente, a três questões: (i) Quais são os prós de se utilizar o *software*?; (ii) Quais são os contras ou limitações ao se utilizar o *software*?; e (iii) Qual é a conclusão, usar ou não o *software*? Esclarecemos que não estávamos fazendo uma avaliação completa e detalhada do *software*, apenas nos reportávamos aos recursos que podiam ser úteis para o ensino de funções quadráticas ou de suas aplicações.

Os futuros professores realizaram a análise explorando as potencialidades e limites dos *softwares* com a execução e utilização de cada um deles.

Por fim, houve ampla discussão dos *softwares*, embasado nas análises feitas por cada dupla. Os alunos argumentaram sobre porque selecionar ou não um *software* para o uso no ensino de funções quadráticas. Ao final do debate, os alunos chegaram a uma conclusão, ainda parcial, de provavelmente não usar o *CrispyPlotter*, que existe a possibilidade de usar o *Graphmatica* e de efetivamente usar o *GeoGebra,* o *Graph* e o *WinPlot*.

Em um segundo momento, por iniciativa dos próprios alunos, os *softwares CrispyPlotter* e *Graphmatica* foram descartados, pois, embora possuam funcionalidades interessantes, os demais *softwares* com pareceres positivos poderiam ser melhor aproveitados para o ensino de funções quadráticas.

Antes de encerrarmos as discussões e optarmos pelos três *softwares*, os alunos questionaram sobre trabalharem com três *softwares* distintos que, em geral, atenderam aos recursos e às características esperadas para o ensino de tais funções, pois teriam que aprender e dominar as três ferramentas.

Nesse momento o participante 7 colocou a seguinte questão: O que os *softwares Graph* e *WinPlot* possuem de recursos que justifiquem seu uso. Isto é, o que eles fazem que não é possível fazer no GeoGebra?

Realizamos em seguida uma discussão com o intuito de responder à questão proposta pelo aluno. Com isso abrimos a possibilidade de reduzir a lista de três *softwares* para apenas um ou dois. Isso resultou em novo debate com argumentação dos participantes focados nesse momento nesses três *softwares*. Por fim, após debaterem e defenderem seus argumentos, os alunos chegaram ao consenso de utilizarem apenas o GeoGebra. No geral, eles já o conhecem e não encontraram funcionalidades substanciais, nos demais *softwares*, que o *GeoGebra* não possuísse e que justificassem investir em seus aprendizados. Mesmo assim, contudo, admitem que existam alguns recursos pontuais que são oferecidos pelos demais *softwares* e não pelo GeoGebra.

A análise, reflexão e discussão desses *softwares* até a definição pelo uso do GeoGebra perduraram por seis encontros com 02 horas/aula cada.

Durante o processo de seleção das tecnologias a serem utilizadas, foi “trabalhada” mais intensamente, em sala de aula, a questão da seleção dos *softwares*, por demandarem maior energia dos participantes, a fim de conseguirem utilizá-los e adquirir certa vivência e conhecimento sobre eles. Foram também avaliados os sites e vídeos, porém por possuírem maior simplicidade de uso quando comparado aos *softwares*, essas experimentações e avaliações foram realizadas em atividades extraclasse, demandando menor esforço dos alunos participantes.

Após os participantes vivenciarem as dificuldades, as limitações e as possibilidades de todas as mídias encontradas na pesquisa inicial, realizarem diversos debates, refletirem sobre os prós e os contras de cada tecnologia estudada, consideraram serem úteis, para estudar funções quadráticas, os sites Comportamento das Funções, *Graph.tk* e *WolframAlpha*. Eles, contudo, por serem sites, possuem necessidade de acesso simultâneo à internet por todos os alunos. Outro fator relacionado a esses sites é que possuem menos recursos que os existentes em diversos *softwares*. Mesmo assim, no entanto, *WolframAlpha*, embora com suas limitações, destaca-se por permitir uma apresentação diferenciada dos demais, inclusive quando comparado com alguns *softwares*.

O GeoGebra, ao final das discussões, foi o *software* selecionado pelos participantes, embora o *Graph* e o *Winplot* tenham conseguido vários adeptos. Assim, possivelmente, esses adeptos possam vir a utilizá-los ao longo de suas carreiras docentes.

Por fim, as videoaulas encontradas pelos alunos foram consideradas úteis para a inspiração dos professores, contudo os participantes não as consideraram propícias para auxiliarem no ensino ao usarem o laboratório de informática ou mesmo a sala de aula. Cabe observar que o vídeo por nós apresentado não foi objeto de análise pelos participantes, uma vez que optaram por trabalhar apenas com os encontrados na primeira etapa da pesquisa por eles realizada.

Existe um pano de fundo apontado para a escolha do GeoGebra. Muitos já conheciam o GeoGebra no curso. Três deles já fizeram cursos utilizando o GeoGebra como ferramenta. E dez dos 12 participantes informaram possuir ao menos conhecimento básico desse *software*. Consideramos, contudo, que a escolha é plenamente válida, isso devido aos embasamentos e aos debates realizados em sala.

Essa decisão de trabalhar com o GeoGebra, ou com qualquer outro *software*, durante as aulas práticas poderia ter sido tomada por nós, inicialmente, logo que ocorreu a escolha, pelos alunos, do conteúdo a ser trabalhado. Optamos, contudo, por favorecer a pesquisa didática pela turma de modo que os futuros professores viessem a adquirir, na prática, os conhecimentos e as habilidades necessárias para tomar decisões informadas, fazer opções quando se depararem com a condição de ter que escolher tecnologias para trabalhar com um conteúdo.

Planejamento e execução das microaulas

A segunda etapa da experiência formativa realizada com a turma de formandos do curso de Licenciatura em Matemática consistiu da realização de planejamento e execução de microaulas sobre funções quadráticas utilizando os computadores do laboratório de informática do curso, fazendo uso das tecnologias estudadas em sala. Essas aulas tiveram como pressuposto a utilização das TIC, selecionadas na etapa anterior, para o estudo desse conteúdo em sala de aula.

Para realizarem o planejamento pedagógico e a elaboração da microaula, solicitamos aos alunos estagiários que se agrupassem em duplas, procurando explorar função quadrática de modo geral e as tecnologias selecionadas por eles mesmos.

Para orientar os participantes de como deveria ser realizado o planejamento da aula, disponibilizamos um roteiro indicando o que deveria ser contemplado e de que maneira isso deveria ser feito. Para auxiliar na elaboração deste planejamento nos disponibilizamos a contribuir com esclarecimentos de dúvidas e sugestões.

O objetivo da elaboração dessas microaulas foi permitir aos licenciandos adquirirem maior vivência e experiência ao elaborar uma aula contemplando conteúdos relacionados às funções quadráticas, colocando em prática as tecnologias selecionadas. A ideia da elaboração desse planejamento distingue-se do tradicional plano de aula. Nele, incitamos os participantes a descreverem passo a passo como seria a aula, inclusive as explicações e as telas dos programas utilizados, a cada momento da aula, com a devida evolução temporal das atividades.

Nosso objetivo com esse planejamento detalhado foi propiciar aos participantes – eles, na grande maioria, com pouca ou nenhuma experiência em sala de aula empregando tais tecnologias – que conseguissem visualizar a aula, desenvolver a atividade previamente, compreender o conteúdo e como utilizar a tecnologia pedagogicamente para o ensino daquele assunto. Tratava-se, pois, de proporcionar condições para, ao chegarem à sala, aplicarem aquela microaula, vivenciando na prática como organizar e executar uma aula em laboratório de informática com o uso pedagógico das TIC para o ensino de um conteúdo.

Em um segundo momento, com o intuito de verificar a abrangência do planejamento elaborado pelas duplas de participantes, conferir se havia erros e sugerir correções, modificações ou aprimoramentos, solicitamos os planejamentos para analisá-los.

Infelizmente nosso tempo para as duplas ministrarem as microaulas era escasso devido a limitações impostas pela carga horária da disciplina[15]. Assim, portanto, em termos de planejamento, as duplas realizaram-no sobre funções quadráticas, procurando explorar conceitos e aplicações, mas na microaula deveriam trabalhar apenas com uma parte. Como a sala foi dividida em seis duplas para ministrarem as microaulas, duas abordaram os coeficientes e o gráfico das funções. As demais duplas encarregaram-se de trabalhar com aplicações, o que possibilitou que as duplas trouxessem atividades multidisciplinares. Solicitamos apenas que conversassem entre si para não repetirem aplicações semelhantes.

Combinamos que haveria duas apresentações por aula, sendo necessárias três aulas com 2h cada para realizarem seus trabalhos. Essas microaulas foram realizadas em um laboratório de informática da universidade, para que os alunos pudessem vivenciar a realidade de lecionarem nesse ambiente. Isso tudo foi feito mesmo convictos de que a realidade seria distinta da prática na escola, com turmas da Educação Básica, quando comparadas com essas aulas, ministradas à turma de formandos no Ensino Superior, devido, dentre outros aspectos, ao

[15] Executamos a experiência formativa inserida em uma disciplina do quarto ano de um curso de licenciatura em matemática da Unespar.

conhecimento e à maturidade da classe.

Fazemos, a seguir, um breve relato, descrevendo o conteúdo abordado por cada dupla.

As duas primeiras duplas a apresentar trabalharam com os conceitos matemáticos que envolvem as funções quadráticas sem entrarem no aspecto de suas aplicações.

Assim iniciamos as sessões com a primeira microaula, apresentada pelas participantes 6 e 11, que deveriam trabalhar com a parte fundamental das funções quadráticas. Elas não utilizaram o GeoGebra ou outro *software* para apresentar a aula, que foi totalmente expositiva, com apresentação de slides pelo projetor multimídia. Abordaram a concavidade da parábola conforme o valor positivo ou negativo do parâmetro a. Em seguida, falaram sobre os zeros e raízes da função, por meio da Fórmula de Bhaskara. Surgiu o assunto referente ao Delta (Δ) e o que ocorre quando seu valor é maior, menor ou igual a zero. Nesse momento, a sala realizou alguns questionamentos e as participantes abriram o GeoGebra para refazer o gráfico da função e mostrar os resultados para os demais alunos. Depois, tentaram mostrar a solução das raízes de uma equação quadrática por meio da determinação da soma e o produto dessas raízes, em que $x' + x'' = -b/a$ e $x' * x'' = c/a$ em que a ,b e c são os coeficientes da função e x' e x'' são as raízes. Ocorreu, no entanto, que a dupla se perdeu na explicação e não conseguiu "ensinar" o conteúdo. Para encerrar a microaula, abordaram o vértice, máximo e mínimo da parábola.

Ao término dessa microaula, pedimos a palavra para comentar sobre a preocupação pedagógica do uso da tecnologia; salientamos a diferença de uma aula prática utilizando o laboratório e uma aula em sala tradicional, mesmo utilizando ferramentas computacionais como a projeção. Explanamos sobre a preocupação diferenciada de acompanhar os alunos durante as atividades que eles fazem no computador, em especial quando surgem dificuldades no uso daquela tecnologia.

Na segunda parte do encontro houve a apresentação de outra microaula, esta com a incumbência de abordar o mesmo conteúdo:

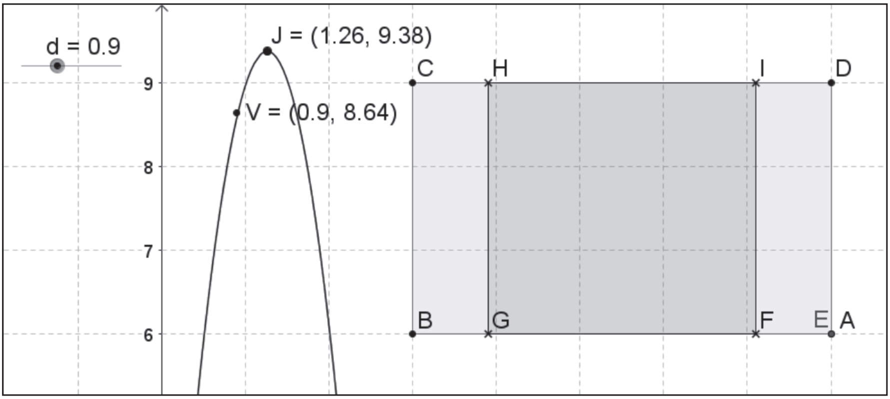
conceitos das funções quadráticas. Essa microaula foi realizada pelas participantes 4 e 12. Iniciaram a aula com a construção do gráfico de uma função afim $f(x) = x+2$ e, em seguida, plotaram o gráfico de uma função quadrática básica $g(x) = x^2$, ambas realizadas no GeoGebra. Esclareceram a diferença entre os gráficos de uma função linear e de uma quadrática. As participantes inseriram Controles Deslizantes[16] no GeoGebra para construir uma função quadrática genérica $f(x) = ax^2 + bx+c$. Por fim, explicaram o que ocorre quando varia cada um dos coeficientes. Percebemos, nessa segunda aula do dia, que as participantes compreenderam o modo de usar pedagogicamente a tecnologia para o estudo do conteúdo.

No segundo dia dedicado às microaulas no laboratório de informática, mais duas duplas apresentaram. A proposta das microaulas a partir desse momento foi a apresentação de uma aplicação das funções quadráticas.

A terceira microaula foi apresentada pelos participantes 1 e 5. Eles trouxeram um problema em que era proposto encontrar o maior volume formado pela dobra de uma cartolina. No caso específico desse exercício, deveriam existir apenas duas dobras fazendo um formato de *"U"* e imaginando o volume do interior, mesmo não havendo as quatro bordas da "caixa", que, no caso, terá apenas o fundo e duas laterais. Iniciaram construindo um retângulo no GeoGebra com as dimensões da cartolina. Incluíram um controle deslizante d para indicar o local da dobra na figura e incluídas duas linhas paralelas às bordas. Essas linhas serviram para representar o local da dobra. Foi criada uma função quadrática e sua representação gráfica. Foi necessário encontrar o ponto de máximo dessa função, que indica a posição da dobra da cartolina que fornece o maior volume à "caixa".

[16] Controle deslizante é uma ferramenta do GeoGebra que possibilita a alteração de valores com mínimo e máximo pré-definidos de maneira simples por quem utiliza.

Figura 2: Construção no GeoGebra referente a caixa em "U”



Fonte: Arquivo do GeoGebra desenvolvido pelos participantes 1 e 5

A construção também permite manipular a distância da dobra em relação às bordas, para calcular o volume por meio da manipulação dos objetos, conforme representado na Figura 2.

Embora a ideia de ponto de máximo seja compreensível e a “caixa” tenha um conceito que pode ser observado visualmente, percebemos que a aula, em grande parte, ficou em torno da construção da figura, que apenas ao final, com a manipulação do local da dobra, pode contribuir para o aprendizado. Concluindo que pode ser comparado o local da dobra formado pelos segmentos $\overline{GH}$ e $\overline{IF}$ com o ponto V no gráfico, gerado pela função quadrática.

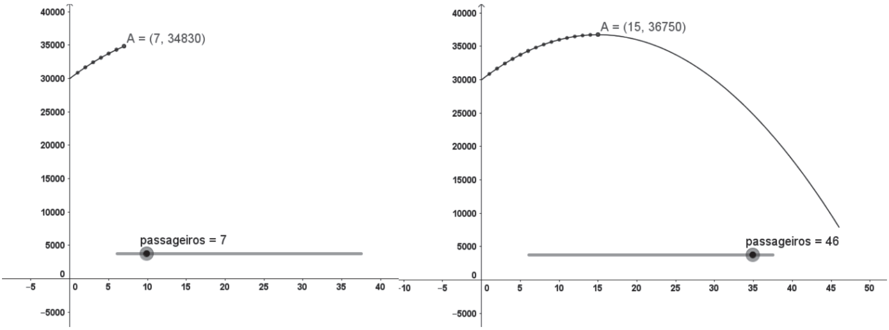
No encerramento, demonstramos nossas impressões sobre a aula para que toda a turma pudesse perceber os problemas e cuidar para que não ocorram novamente, em especial durante a prática do profissional que está prestes a se formar.

A quarta microaula foi apresentada pelos participantes 3 e 9. O objetivo do exercício de aplicação, por eles proposto, foi o de encontrar o custo da passagem de uma viagem de avião, que é calculado de acordo com a quantidade de assentos vendidos.

De acordo com os dados do problema, apresentado em detalhes na aula, a função que representa o custo da passagem é dada por $L(x) =$

$Q*V$, em que: $Q = 50 - x$, deste modo $L(x) = (50 - x) * (600 + 30 * x)$, assim a $f(x) = 30* x^2 + 900 * x + 30000$. Esta função, quando representada graficamente, mostra no eixo X a quantidade de assentos vendidos.

Figura 3: Construção no GeoGebra referente ao custo da passagem aérea



Fonte: Adaptado do arquivo do GeoGebra desenvolvido pelos participantes 3 e 9

A dupla inseriu no GeoGebra um controle deslizante que indica a quantidade de passageiros. O gráfico da função se estende de acordo com a quantidade de passageiros. O ponto A indica, de acordo com a quantidade de passageiros, o custo máximo da passagem, isto é, o ponto de máximo do gráfico da função até onde o gráfico foi desenhado. A Figura 3 mostra dois momentos dessa construção em que os alunos podem acompanhar alterando pelo controle deslizante a quantidade de passageiros da aeronave. No primeiro momento, o controle deslizante iniciou em 1 e foi movimentado até 7. O ponto A que exibe o ponto de máximo do gráfico da função foi crescendo e exibindo a quantidade de passageiros e o valor da passagem. Em um segundo momento, o número de passageiros já está em 46, contudo o ponto A alcançou seu máximo no gráfico de *f(x),* indicando que, para 15 passageiros, o valor é de R$ 36.750,00 para o custo da passagem.

Ao fim da aula, esclarecemos que esse foi um bom exemplo de uso para o GeoGebra e que os alunos podem, com esse exemplo, compreender, de maneira prática, uma das aplicações do ponto de máximo de uma função quadrática. Sugerimos, contudo, que os valores para construção da função fossem revistos, de modo a alcançarem valores mais realistas para serem trabalhados em sala de aula, o que facilitaria a compreensão do valor de uma passagem aérea pelos estudantes. Igualmente, o ponto A poderia ter um nome mais explicativo à sua funcionalidade.

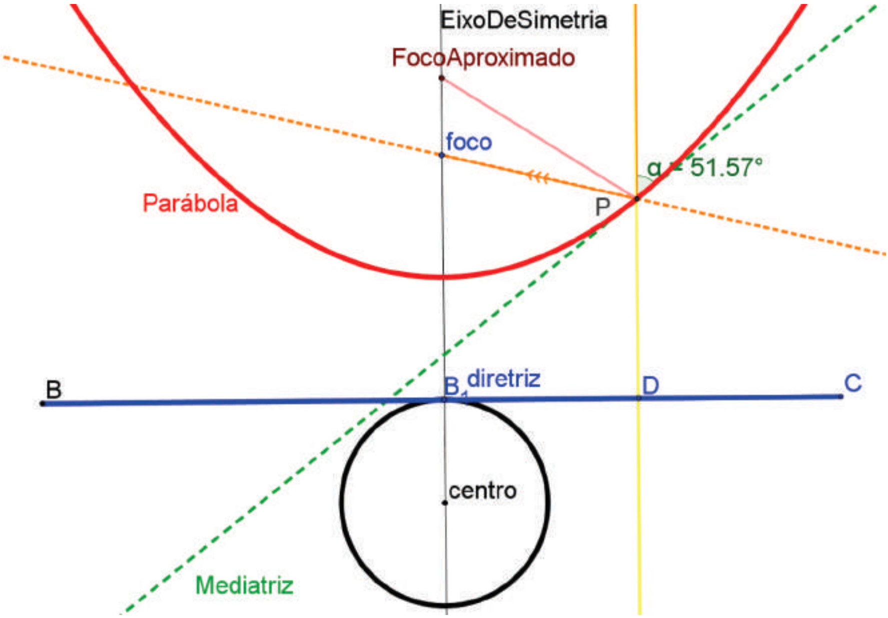
A penúltima microaula foi apresentada pelos participantes 2 e 7. Eles optaram por realizar, na microaula, uma das atividades que iriam "trabalhar" em suas aulas práticas durante seus estágios na escola, com os alunos do primeiro ano do Ensino Médio: a construção de uma parábola, a partir de seus conceitos, sem a utilização de uma função e seu gráfico (CIBOTTO, 2015).

No GeoGebra, desenharam um círculo, cuja circunferência é traçada em preto. Tangenciando o círculo, foram criados uma reta e um segmento (azul) ligando dois pontos (B e C) sobre a reta tangente, que representa a diretriz da parábola. Esse segmento foi denominado de Diretriz. Na perpendicular à reta tangente foi criada outra reta, que passa pelo centro do círculo (preta). Nessa reta foi inserido um ponto, que será o Foco da parábola. Um ponto (D) foi criado sobre o segmento de reta. Sobre esse ponto foi inserida uma reta perpendicular ao segmento BC (amarela). Foi traçada uma mediatriz (pontilhada em verde) entre o ponto D e o Foco. O ponto (P) que passa pela reta perpendicular e pela mediatriz é um ponto da parábola (vermelha). O lugar geométrico desse ponto é responsável por desenhar a parábola. A mediatriz (laranja pontilhado), entre as retas verde pontilhada e a amarela, que passa pelo ponto P atravessa o foco da parábola.

Com esta construção concluída, os participantes contaram a história de Arquimedes, que queimava navios inimigos por meio do reflexo do Sol em espelhos de bronze alinhados em formato parabólico na costa.

Em seguida, foram inseridos segmentos de reta (laranja), entre o Foco e o ponto P, que mostram o caminho percorrido pela luz que chega à parábola e é refletido para o foco da mesma ou a emissão de um raio de luz que sai do foco da parábola. A construção da parábola está ilustrada na Figura 4.

Figura 4: Construção no GeoGebra referente à definição de uma parábola



Fonte: Arquivo do GeoGebra desenvolvido pelos participantes 2 e 7

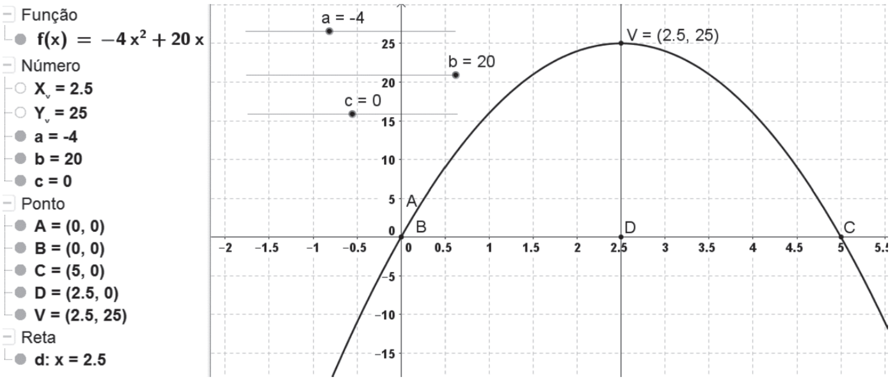
Com a realização da construção, que foi seguida pelos demais alunos, colegas de classe, os professores-alunos iniciaram questionamentos com a turma a respeito de exemplos que apresentam a emissão de luz, como farol de automóvel e lanternas, ou seja, um ponto de luz, inserido no foco da parábola, então se observando o caminho percorrido pela luz ao sair do foco. Em seguida, foi mostrado o que ocorre quando o foco de luz está colocado mais próximo da parábola que seu foco. Por último, o que acontece quando o foco está colocado mais distante da parábola que seu foco com a movimentação do ponto Foco Aproximado (marrom).

Ficamos preocupados com a complexidade de comandos envolvidos na construção da parábola, no sentido de haver muitos passos a serem executados pelos alunos. Chamamos a atenção para o caso de estudantes que não conheçam como utilizar o *software*, poderiam ter dificuldade e demorar um tempo considerável para a elaboração do "desenho" da parábola. Além disso, ficou explicitada a necessidade de rever com os alunos conceitos fundamentais, a exemplo de diretriz, perpendicular, mediatriz, foco e lugar geométrico, dentre outros. Mesmo assim, o dinamismo alcançado com o resultado da elaboração dessa parábola pode ser bastante explorado pelos professores, permitindo que os alunos girem a parábola, alterem o posicionamento do ponto de foco, afastando ou aproximando do ponto focal da parábola, e observem o que ocorre com raios de luz ou ondas de rádio. Podem fazer a relação com objetos parabólicos que podem ser vistos na realidade dos estudantes.

A apresentação da sexta e última microaula foi organizada pelas Participantes 8 e 10. A ideia dessa aula foi trabalhar o lançamento de um projétil e expuseram o seguinte problema: O movimento de um projétil lançado para cima, verticalmente, é descrito pela equação $Y = -4x^2 + 20x$, em que Y é a altura, em metros, atingida pelo projétil, x segundos após o lançamento. a) Que altura máxima o objeto atingiu? b) Quanto tempo ele levou para atingir esta altura? c) Quanto tempo o projétil levou para subir? E para descer?

Usando o GeoGebra, os alunos montaram a função $f(x)=ax^2+bx+c$ utilizando controles deslizantes para representar os valores dos parâmetros *a, b* e *c*. Posteriormente, foi solicitado que a turma encontrasse a mediatriz entre os pontos das raízes da função com a justificativa de localizarem o ponto de máximo daquela função. As participantes ensinaram a turma a "desenhar" no GeoGebra. Mostraram como encontrar o vértice pela coordenada $X_v = -b / (2a)$ e $Y_v = (-(b^2 - 4ac)) / (4a)$ e plotar $V = (X_v, Y_v)$, conforme apresentado na figura 5.

Figura 5: Construção no GeoGebra referente ao deslocamento de um projétil



Fonte: Arquivo do GeoGebra desenvolvido pelas participantes 8 e 10

O professor da disciplina em que estávamos trabalhando chamou a atenção com relação à orientação e ao deslocamento do projétil, pois, com a criação do gráfico, erroneamente, pode parecer que a trajetória do projétil é idêntica ao gráfico de *f(x)*. Então, uma participante mostrou um ponto percorrendo a parábola, que indica do deslocamento altura *versus* tempo.

As participantes concluíram a aula retornando ao enunciado do problema e respondendo às questões: a) Que altura máxima o objeto atingiu? Como foi definido que *y* é a altura em metros, podemos perceber que o maior valor que *y* pode alcançar é 25 m; b) Quanto tempo ele levou para atingir essa altura? Na altura máxima alcançada pelo projétil, o tempo de subida é 2,5 segundos; c) Quanto tempo o projétil levou para subir? E para descer? Como o projétil começou no tempo t(0) = 0 (ponto A), ele levou 2,5 segundos para subir (ponto C) e mais 2,5 segundos para descer (ponto D).

Na questão apresentada, o *software* contribuiu para uma resolução de modo relativamente simples do problema proposto. Bastou inserir alguns comandos para que os resultados fossem apresentados na tela. Em seguida, foi necessário apenas interpretá-los. Chamamos a atenção, entretanto, para o fato de que a solução poderia ter sido apresentada mediante utilização de papel e lápis. Embora seja uma atividade válida, queremos privilegiar o uso do *software* para que os alunos possam aproveitar, em algum grau maior que o simples gráfico manual, o dinamismo por ele oferecido, alterando valores ou parâmetros e observando os resultados. Nesse caso, embora tenham sido inseridos controles deslizantes, eles não tiveram um papel relevante no estudo do problema. Seus valores ficaram fixos de acordo com a equação do enunciado.

Desse modo, toda a turma participou ministrando as respectivas microaulas e assistindo às dos colegas. Perceberam, por meio dessas aulas, maneiras mais ou menos dinâmicas do uso da tecnologia. Os exemplos utilizados foram replicados pela turma, que acompanhou o desenvolvimento dos problemas em seus computadores, no laboratório de informática. Ficaram com cópia dos arquivos utilizados para, em caso de interesse, resgatarem e aperfeiçoarem essas atividades visando utilizarem-nas em sala de aula quando sentirem necessidade.

Considerações finais: implicações para o ensino de matemática

Apresentamos neste texto uma experiência formativa, realizada com uma turma de quarto ano de um curso de licenciatura em matemática, na qual relatamos a oportunidade que os alunos tiveram de conhecer, na prática, como as tecnologias podem ser utilizadas para o ensino.

Uma vez delimitado o conteúdo, os licenciandos formaram duplas e foram orientados a pesquisar por TIC que possibilitem o ensino daquele assunto. Os futuros professores buscaram TIC, mais especificamente, vídeos disponíveis na internet, *softwares* e sites que contribuíssem para o processo de ensino e aprendizagem daquele conteúdo. Foi verificado por meio de pesquisa documental e visita a alguns laboratórios de informática de escolas da Educação Básica quais tecnologias estavam disponíveis ou poderiam ser utilizadas em tais ambientes. Em seguida analisaram cada TIC inicialmente selecionada para escolher as que iriam utilizar em sua prática. Com o intuito de se prepararem para ministrar as aulas, elaboraram e realizaram aulas simuladas, contemplando o conteúdo escolhido, por meio do uso pedagógico do *software* selecionado.

Consideramos relevante para a formação inicial e continuada de professores de matemática que os professores, ou futuros professores, possuam contato prático com as TIC durante seu processo formativo de modo a propiciar apercepção e reflexão sobre as contribuições e os limites da inserção do uso pedagógico das tecnologias como instrumento didático na Educação Básica, buscando a formação de um professor que esteja preparado para utilizar as TIC pedagogicamente nos procedimentos de ensino-aprendizagem de matemática.

Com este embasamento, antes de planejarmos em detalhes a experiência formativa que serviria de base para esse estudo, buscamos conhecer as necessidades e as expectativas da escola com relação ao uso pedagógico das tecnologias.

Percebemos que são diversas as questões relativas ao uso pedagógico das TIC no atual sistema de ensino nacional. Algumas passam por amplos e complexos temas, como a tendência da mudança da transmissão de instruções realizadas puramente em quadro e giz para uma realidade envolvendo a construção do conhecimento com a contribuição da utilização de tecnologias digitais como mediadoras desse processo.

Passamos a questionar se existe uma possibilidade de solução, a ser empregada na formação inicial, para o professor trazer o uso das tecnologias para a sala de aula de forma massiva, a fim de incentivar o ensino.

Para essa incorporação das tecnologias no ensino de matemática, diversos são os desafios, não bastando a simples informatização do ambiente escolar, pois isso não garante benefícios ao aprendizado de matemática ou de qualquer outra disciplina, visto que os computadores podem a ser subutilizados pela falta de adequada infraestrutura e pelo desconhecimento do corpo docente de como tirar proveito dessas tecnologias. Atualmente, mesmo um professor que possui o ímpeto de ensinar usando as tecnologias como auxiliadoras, deve estar disposto a contornar e a superar dificuldades relacionadas a problemas comuns de infraestrutura espalhados por este país de dimensões continentais. Trata-se de desafios como a existência de escolas com computadores que não funcionam adequadamente, que travam constantemente, possuem acesso limitado à internet ou liberado a quase todo tipo de sites, além de conexão de má qualidade, espaço físico inadequado a uma sala de aula informatizada e falta de espaço. Outros educadores, no entanto, ao vislumbrarem tais dificuldades, temem adentrar a essa zona de risco com receio do desconforto e pelo desconhecimento de como utilizar a tecnologia computacional. Como se sabe, esses educadores necessitam de grande tempo disponível para elaborar as atividades, em especial no início desse tipo de trabalho.

Verificamos que, atualmente, mesmo de maneira pontual e esporádica, modificações vêm ocorrendo nas salas de aula, conforme relatado por Santos (2013), devido uma demanda de mudanças nas práticas do professor, que antes era responsável por transmitir instruções e utilizava como mídias apenas giz e quadro e, mais recentemente, vem pensando na construção do conhecimento com ferramentas computacionais cada vez mais imbricadas em sua vida pessoal e profissional. O computador, contudo, quando utilizado pedagogicamente, pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem no qual o aluno é visto como construtor do conhecimento e o professor como mediador entre o computador, o aluno e o saber.

Observamos que não é suficiente o educador possuir domínio do conteúdo. Há a necessidade de utilizar métodos diferenciados que envolvem o uso de tecnologias, a comunicação multidirecional com seus alunos, métodos de ensino diversificados e o papel de mediador entre o estudante e o conhecimento criando motivações para o aluno fazer suas próprias descobertas. Trata-se de atividades bastante distintas da tradicional transmissão de informações, pois apresentar o conteúdo para sua simples reprodução não forma o indivíduo exigido atualmente pelo mercado de trabalho ou pela sociedade.

Desse modo, nosso intuito ao propiciar essa experiência formativa com os futuros professores foi de permiti-los a degustarem na prática como é preparar aulas e utilizar as TIC em um ambiente propício a este uso. Permitir que sintam na realidade as implicações deste uso percebendo as dificuldades, as reações dos aprendizes, as motivações e o resultado propiciado pelo ensino de matemática por meio do uso pedagógico das tecnologias.

Algumas das aprendizagens destacadas pelos participantes dessa experiência formativa estão detalhadas em Cibotto (2015) e Cibotto e Oliveira (2015).

Referências

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

CHAI, Ching Sing; KOH, Joyce Hwee Ling; TSAI, Chin-Chung. Review of technological pedagogical content knowledge. **Educational Technology & Society**, v. 16, n. 2, p. 31-51, 2013. Disponível em: http://www.ifets.info/journals/16_2/4.pdf. Acesso em: 23 jul. 2013.

CIBOTTO, Rosefran Adriano Gonçalves. **O uso pedagógico das Tecnologias da Informação e Comunicação na formação de professores**: uma experiência na Licenciatura em Matemática. 2015. 273 f. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, UFSCar, São Carlos, 2015.

CIBOTTO, Rosefran Adriano Gonçalves; OLIVEIRA, Rosa Maria Moraes Anunciato de. TPACK: formação inicial do professor de matemática. In: XIV CIAEM – Conferência Interamericana de Educação Matemática. 3 a 7 maio 2015, **Anais...**,p. 1-12. Disponível em: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem /xiv_ciaem/paper/viewFile/342/174. Acesso em: 12 maio 2015.

CORRADINI, Suely Nercessian; MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti. Práticas pedagógicas e o uso de informática. **Revista Exitus**, Santarém, v. 3, n. 2, p. 85-92, 2013. Disponível em: http://www.ufopa.edu.br/revistaexitus/revistas/vol.-3-no.-2-2013-2013-issn-impresso-2236-2983-issn-eletronico-2237-9460/artigos/praticas-pedagogicas-e-o-uso-da-informatica/at_download/file. Acesso em: 17 abr. 2014.

FEY, Ademar Felipe. A linguagem na interação professor-aluno na era digital: considerações teóricas. **Revista Tecnologias na Educação**, ano 3, n.1, jul. 2011. Disponível em: http://tecnologiasnaeducacao.pro.br/wp-content/uploads/2011/06/ A-linguagem-na-intera%C3%A7%C3%A3o-professor-aluno-na-era-digital-

Considera%C3%A7%C3%B5es-te%C3%B3ricas.pdf. Acesso em: 21 jun. 2012.

GATTI, Bernardete Angelina. Formação de professores no Brasil: características e problemas. **Educação & Sociedade,** Campinas, v. 31, n. 113, p. 1355-1379, out./dez. 2010.

GUIMARÃES, Tania Maria; SENA, Rebeca Moreira. Educação e tecnologia: práticas pedagógicas desenvolvidas nos laboratórios de informática das escolas públicas de Cáceres e região. In: XXX Congresso da Sociedade Brasileira de Computação. 20 a 23 jul. 2010, **Anais...**, p. 1107-1116. Disponível em: http://www.inf.pucminas.br/sbc2010/anais/pdf/wie/st02_06.pdf. Acesso em: 20 jun. 2016.

PRENSKY, Marc. Digital Natives, Digital Immigrants. **On the Horizon.** MCB University Press, v. 9, n. 5, oct. 2001. Disponível em: http://www.marcprensky.com/writing/Prensky%20-%20Digital%20Natives,%20Digital%20Immigrants%20-%20Part1.pdf. Acesso em: 21 jun. 2012.

_____. Homo sapiens digital: from digital immigrants and digital nativesto digital wisdom. **Innovate**, v. 5, n. 3, 2009. Disponível em: http://www.innovateonline.info/pdf/vol5_issue3/H._Sapiens_Digital-__From_Digital_Immigrants_and_Digital_Natives_to_Digital_Wisdom.pdf. Acesso em: 22 jun. 2012.

SANTOS, Danielle Aparecida do Nascimento dos. Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação: projetos na escola. In: SCHLUNZEN JUNIOR, Klaus (org.). **Caderno de formação**: formação de professores: Bloco 3: Gestão Escolar – Gestão da Informação. São Paulo: Cultura Acadêmica, v. 4, 2013, p. 49-61.

Capítulo 4

Modelagem matemática na sala de aula da educação básica: obstáculos a serem transpostos

Amauri Jersi Ceolim
Ademir Donizeti Caldeira

Introdução[1]

A modelagem matemática na perspectiva da educação matemática nas últimas décadas tem se tornado um campo de conhecimento em evidência no Brasil, o que pode ser constatado pelo número crescente de publicações científicas em eventos, periódicos, trabalhos de pós-graduação *stricto sensu*, dentre outros, e também pelo interesse de pesquisadores e professores por essa área (SILVEIRA, 2007; BIEMBENGUT, 2009; ARAÚJO, 2010).

Em relação à produção de livros nacionais com abordagens em modelagem[2], aquela também tem aumentado significativamente nos últimos anos. Segundo informações do Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino (CREMM, 2014), até 2007,

[1] Este trabalho está vinculado à pesquisa de doutorado, no Programa de Pós-Graduação em Educação – UFSCar, do primeiro autor, e teve apoio da Fundação Araucária por meio de bolsas de estudos, vinculadas ao Programa de Apoio à Capacitação Docente das Instituições Estaduais de Ensino Superior – PCD-IEES.

[2] A partir deste momento, a palavra modelagem sempre se referirá à modelagem matemática na perspectiva da educação matemática.

existiam apenas quatro livros de autores brasileiros sobre o tema. Atualmente, são 11 livros, sendo seis deles editados no período de 2011 a 2014.

Apesar de ser um campo de pesquisa que pode ser considerado consolidado no cenário brasileiro, a literatura nos mostra alguns indícios de obstáculos em relação à sua utilização em sala de aula da educação básica (SILVEIRA, 2007; OLIVEIRA; BARBOSA, 2011; SILVEIRA; CALDEIRA, 2012; CEOLIM; CALDEIRA, 2013). Em função desses resultados de pesquisas, sentimo-nos motivados em investigá-los e analisá-los. Assim, este capítulo tem os objetivos de descrever e analisar os obstáculos e as dificuldades apontadas pelos professores, egressos dos cursos de licenciatura em matemática das instituições públicas de ensino do Estado do Paraná, que cursaram, na graduação, a disciplina de modelagem na perspectiva da educação matemática, conforme descrito na próxima seção.

Contextualização e procedimentos metodológicos

O Estado do Paraná foi selecionado porque está em evidência no cenário brasileiro em relação à pesquisa e disseminação da modelagem. Pesquisadores deste Estado têm se destacado, nos últimos anos, com apresentações e publicações em eventos científicos, tanto no próprio Estado como também no cenário nacional e no internacional. Ainda nesse Estado foram realizados seis Encontros Paranaenses de Modelagem em Educação Matemática (EPMEM). O primeiro foi realizado em 2004 e, em 2014, o sexto. Ressaltamos também que a modelagem é contemplada em disciplinas de programas *stricto sensu* de cursos de mestrado e/ou doutorado em três instituições de ensino superior paranaenses. Salientamos que, dos 11 livros nacionais com abordagem de modelagem na perspectiva da educação matemática, quatro são de pesquisadores do Estado do Paraná. Além disso, a modelagem está inserida nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008).

Para a identificação e a classificação da disciplina de modelagem dos cursos de licenciatura em matemática com características da educação matemática, foram consultados as/os ementas/programas de cada curso e analisado se na/no mesma/mesmo constava a aplicação da modelagem matemática na educação básica. Dos 20 cursos de licenciatura em matemática no Estado do Paraná, sete[3] apresentam a disciplina de modelagem na perspectiva da educação matemática. Desses, selecionamos seis[4].

A escolha desses professores ocorreu em dois momentos. No primeiro, precisávamos saber quais estudantes desses seis cursos estavam lecionando ou já tinham lecionado[5]. Desta primeira etapa, conseguimos 57 professores. No segundo momento, foi enviado um segundo questionário[6] a esses professores e, desses, 26 responderam, sendo que 11 desenvolvem ou já desenvolveram atividades de modelagem em suas aulas e 15 não trabalharam ou não trabalham com ela em suas aulas.

Identificados os professores que se enquadravam nos nossos critérios, os dados foram obtidos por meio de um questionário maior, mas, para discussão deste capítulo, analisaremos as respostas de três questões específicas:

> 1) Caso você já tenha trabalhado com modelagem nas suas aulas, comente suas principais dificuldades;
> 2) O que é necessário para que a modelagem matemática seja aplicada em sala de aula da educação básica?;
> 3) Dê sugestões e contribuições sobre o uso da modelagem matemática na sala de aula da educação básica.

[3] Unespar/Câmpus de Campo Mourão; Unespar/Câmpus de União da Vitória; Unespar/Câmpus de Paranavaí; Unespar/Câmpus de Paranaguá; UENP, Câmpus de Cornélio Procópio, UENP, Câmpus de Jacarezinho e Universidade Estadual de Londrina (UEL).

[4] Não conseguimos os dados dos estudantes de uma das instituições. Salientamos que os dados foram obtidos via site das instituições, coordenadores de cursos, secretaria acadêmica e e-mails.

[5] Assim, foram enviados e-mails para 134 graduados dos seis cursos. Destes, obtivemos um total de 57 professores egressos que estão lecionando, ou já lecionaram, na educação básica, os outros 77 egressos ficaram fora do processo, pois 21 deles apresentaram problemas no endereço de e-mails, 13 responderam que não lecionaram e não estão lecionando e 43 não responderam ao questionário.

[6] Construído no Google Docs.

Para a interpretação e análise dos dados da pesquisa, optamos pela Análise Textual Discursiva (MORAES, 2003). Nesse sentido, o *corpus* foi organizado em três etapas previstas nesta metodologia: 1) desmontagem do texto ou fragmentação; 2) estabelecimento de relações ou categorização; e 3) captação do novo emergente ou construção do metatexto.

Para a realização dessas etapas, o texto de cada respondente foi lido e relido várias vezes para que as ideias de cada professor envolvido pudessem ser impregnadas por nós. Feito isso, iniciamos o trabalho de desmontagem do texto, ou seja, a retirada dos fragmentos que nos interessavam para as análises e que comportam os significantes os quais contribuíram na construção de novos significados sobre o fenômeno educacional em questão.

Para sabermos a procedência de cada fragmento, criamos um código alfanumérico de identificação, composto por três partes ordenadas da esquerda para a direita, conforme os exemplos: (i) S7.8.5 – Professor 7 que trabalha ou já trabalhou com a modelagem em suas aulas, questão 8, fragmento 5; e (ii) N12.7.5 – Professor 12 que não trabalha ou não trabalhou com a modelagem em suas aulas, questão 7, fragmento 5.

Após a fragmentação do corpus, passamos para a etapa 2: a categorização desses fragmentos. As emersões das categorias foram acontecendo no momento em que atentamos para a convergência de ideias presentes nos fragmentos do corpus, ou seja, emergem com base no conhecimento tácito ou teorias implícitas do pesquisador.

Desse processo, emergiram quatro categorias de convergência: 1) insegurança dos professores em utilizar a modelagem em suas aulas; 2) formação inicial insuficiente dos professores; 3) dificuldades em aplicar a modelagem pela postura tradicional e conservadora do sistema escolar; 4) dificuldades em envolver os estudantes num ambiente de modelagem.

O “metatexto” é o terceiro passo da análise textual discursiva. Trata-se de um texto que se constitui numa tentativa de compreensão mais abrangente do fenômeno investigado, que busca encontrar novos sentidos e diferentes daqueles já existentes nos textos originais dos discursos (MORAES, 2003), e foi construído a partir das quatro categorias, como veremos a seguir.

Insegurança dos professores em utilizar a modelagem em suas aulas

A categoria Insegurança dos professores em utilizar a modelagem em suas aulas aborda preocupações referentes a/à (i) conhecimento insuficiente dos professores sobre Modelagem, (ii) insegurança com o novo, (iii) se a modelagem exige uma conduta diferente do professor: professores acostumados com práticas tradicionais, e (iv) dificuldade em sair da zona de conforto e romper com práticas tradicionais.

Em relação ao conhecimento insuficiente dos professores sobre modelagem, fica evidenciada principalmente a questão da formação inicial, porém salientamos que essa formação será discutida na próxima categoria por se tratar de um tema que consideramos merecer um pouco mais de atenção. Dessa forma, a questão da falta de conhecimento de modelagem não se esgota nessa categoria.

Alguns fragmentos das respostas dos professores mostram e enfatizam que, para aplicar a modelagem na sala de aula, é necessário ter um bom conhecimento sobre aquela: S1.8.1 "acredito que, antes de tudo o professor deve conhecê-la, de forma mais aprofundada e não superficialmente como vi, quando atuei na rede pública"; e N8.7.1: "pouco conhecimento da área, pois na graduação, não houve aulas de Modelagem, suficientes para tal aperfeiçoamento".

Ressaltamos que o trabalho com modelagem, como afirma Almeida (2009), possibilita ao estudante aprender sobre, aprender por meio e a refletir sobre. Pensamos que isso possa acontecer também com o professor, porque trabalhar com modelagem é estar num ambiente imprevisível, uma vez que se trata de temas ou de problemas relacionados à realidade em que os estudantes estão inseridos. Assim, o professor também aprende ao trabalhar com a modelagem, adquire conhecimento, trabalhando com ela e amplia seu campo teórico. Corroboramos também as reflexões de Ferreti e Kluber (2009) em relação ao conhecimento de que o professor necessita para trabalhar com modelagem nos anos iniciais do ensino fundamental. Para eles, "nenhum professor está totalmente pronto para atuar, nem mesmo os que se formam em matemática têm total domínio para usar a Modelagem Matemática em suas aulas" (FERRETI; KLUBER, 2009, p. 11, grifo nosso).

No fragmento N12.7.2: "O conhecimento não visa somente o ensino da matemática, mas outras áreas, por isso, a necessidade de muito conhecimento", fica elucidado que o trabalho com modelagem exige conhecimento além da matemática. Assim, esse professor[7] deve estar se referindo às características ou às concepções da modelagem, como, por exemplo, que esta pode ser abordada de forma interdisciplinar, envolvendo temas que não estão aparentemente relacionados a conteúdos matemáticos da prática tradicional. Como relata Araújo (2007), a modelagem pode ser trabalhada por meio de "um problema não-matemático da realidade, ou de uma situação não-matemática da realidade, escolhida pelos alunos reunidos em grupos" (ARAÚJO, 2007, p. 30).

Essa forma de abordagem, dentre outras, exige do professor uma conduta diferente, uma conduta que permita estar aberto para novos desafios, que esteja preparado para buscar novos conhecimentos.

Em relação à insegurança com o novo, selecionamos alguns fragmentos que mostram preocupações nessa direção: S1.8.3: "maior segurança para usá-la"; N3.7.1: "insegurança por minha parte"; e N12.7.3: "medo do novo, e se dará certo".

Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p. 59), o desenvolvimento de atividades com modelagem proporciona diversos caminhos e não há previsibilidade. Relatam que "o 'emudecimento' dos estudantes, no decorrer dos anos escolares, é algo que depõe contra o trabalho com Modelagem". A insegurança com o novo pode ser pelo

[7] Utilizamos, neste texto, o substantivo no masculino quando nos referirmos aos sujeitos da nossa pesquisa, para evitar repetições como, por exemplo, o/a professor/a.

fato de estarem acostumados com práticas tradicionais, encontrarem-se numa zona de conforto, em que tudo é previsível e, na maioria das vezes, corroboram práticas para a aceitação da realidade como posta. A modelagem exige outra conduta, pois o professor não trabalha com resultados previsíveis, os temas podem ser abertos, as questões podem estar relacionadas com fatores econômicos, culturais, sociais etc., e o professor está sempre numa zona de risco e de busca.

Uma reflexão mais aprofundada poderá ajudar a compreendermos o processo e percebermos que, quando se trata de questões complexas, sempre haverá resistências, dúvidas etc. Conforme dizem Tardif e Lessard (2005, p. 43), esse é o caso da modelagem, pois esta acontece "dentro de um ambiente complexo e, por isso, impossível de controlar inteiramente, pois, simultaneamente, são várias as coisas que se produzem em diferentes níveis de realidade". É preciso compreender que o ato de ensinar envolve procedimentos diferentes daqueles previstos nos regulamentos, nos programas, no planejamento da aula. Assim, com a modelagem não é diferente, pois o professor é desafiado constantemente.

Em relação aos aspectos levantados, a modelagem exige uma conduta diferente do professor: professores acostumados com práticas tradicionais são apontados obstáculos e/ou dificuldades pelo fato de o trabalho com modelagem exigir uma perspectiva mais dinâmica, aberta e investigativa. Seguem alguns fragmentos nessa direção:

> S2.7.2 Exige uma atitude investigativa que precisa ser trabalhada e estimulada; S1.9.2 [...] reconhecerem-se enquanto sujeitos sociais, responsáveis pelas tomadas de decisão na sociedade; em detrimento de um ensino baseado na aquisição de conceitos tidos como prontos e definitivos.

Para esses professores, a modelagem não se enquadra como uma metodologia de ensino em que o professor apenas a utiliza para resolver problemas da realidade ou, simplesmente, aplica-a, tendo o objetivo final de chegar a um modelo matemático.

Percebemos que a concepção de modelagem, relatada nesses fragmentos, pode ser considerada aquela que tem um caráter investigativo, concepção que reflete sobre as questões sociais, econômicas, culturais e políticas, e concepção que permita conhecer criticamente a realidade e, talvez, modificá-la. Uma abordagem na perspectiva “progressista”, conforme relata Freire (2011), em que ensinar não é transferir conhecimento, mas, sim, criar possibilidades para a sua própria produção.

Em relação à dificuldade em sair da zona de conforto e romper com práticas tradicionais, os professores mostraram-se resistentes à prática de modelagem em suas aulas, alegando que ela exige abordagem diferente, maior preparo, planejamento de aula diferenciada e vai além da sala de aula. Para o Professor S2.7.1, “O trabalho com a Modelagem Matemática destoa das aulas expositivas com as quais os professores e alunos estão acostumados”; e S10.8.1argumenta que “é necessário grande empenho e dedicação por parte do professor, o qual precisará compreender o processo de Modelagem Matemática de modo a orientar os alunos, o que dá margem para diversas interpretações”.

Caldeira (2009) considera que, por meio da modelagem, é possível “problematizar, elaborar suas próprias perguntas, desenvolver por meio da pesquisa, refletir e tirar suas próprias conclusões” (CALDEIRA, 2009, p. 38). Barbosa (2007) destaca que uma das formas de conceituar modelagem é um ambiente de aprendizagem em que os estudantes são convidados a indagar e/ou investigar situações/problemas da realidade por meio da matemática. Existem outras abordagens/concepções/definições sobre a modelagem e todas têm em comum referência a situações/problemas relacionados à realidade em que os estudantes estão inseridos.

O trabalho com modelagem realmente exige que o professor saia da “zona de conforto” a que está acostumado, na maioria das vezes, adotando práticas rotineiras e padronizadas pela escola, práticas que têm a preocupação básica de oferecer apenas variedade e quantidade de conceitos matemáticos, caracterizando-se, assim, um ensino calcado no verbalismo do professor e na memorização dos estudantes.

Formação inicial insuficiente dos professores

Nessa categoria são discutidas questões relacionadas com: (i) a falta de uma base de formação consistente para aplicações da modelagem em suas aulas; (ii) a necessidade de uma postura diferente da tradicional; e (iii) a falta de discussões e reflexões teóricas sobre práticas de modelagem na sala de aula da educação básica.

Em relação ao item (i), são apontados indícios de obstáculos/dificuldades enfrentados pelos professores que alegam, principalmente na graduação, a falta de vinculação da modelagem com a sala de aula da educação básica e de conhecimento da mesma, conforme relatam os professores:

> N8.8.1 É necessária uma formação de qualidade para o professor de matemática que leve em consideração na sua grade curricular a modelagem Matemática aplicada ao ensino médio; S6.9.1 [...] desejo do professor encaminhar isso para a sua sala, e que para isso ocorra tal professor, enquanto aluno de graduação, tenha vivenciado atividades dessa natureza.

De acordo com esses professores, para se trabalhar com modelagem na sala de aula da educação básica, é necessária uma boa base teórica específica do assunto. Relatam que o conhecimento sobre modelagem, recebido na formação inicial, não foi suficiente para respaldar esse tipo de trabalho em suas aulas.

No Estado do Paraná, a disciplina de modelagem é incorporada aos cursos de licenciatura em matemática com uma carga horária que varia de 60 a 144h. Salientamos que apenas dois cursos apresentam 144h.

Isso significa que a maioria dos cursos apresenta uma carga horária ínfima para a disciplina de modelagem. Verificamos também que na ementa/programa da disciplina há um percentual significativo de conteúdos matemáticos sem relação com a educação básica.

Além disso, na grade dos cursos de licenciatura em matemática do Estado do Paraná, as disciplinas voltadas para as áreas da educação matemática e conhecimentos gerais de educação e representam, em média, 23,7% do total das disciplinas ofertadas (CYRINO, 2013). Trata-se de um percentual pequeno de disciplinas voltadas para a área da educação matemática, e a modelagem se encontra nesse contexto, com uma média de 1,3%, ficando nítida a predominância de disciplinas voltadas aos conteúdos matemáticos. Tal fato reforça a afirmação de Moreira (2012) de que as disciplinas que não têm relação com a educação são executadas independentemente das outras disciplinas, ou seja, não existe relação das disciplinas com caráter matemático com as da área de ensino.

Segue fragmento nessa direção: N14.8.1: "formação decente para os futuros professores. Como inserir a modelagem matemática na sala de aula, se o profissional em questão não foi preparado para isso".

Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) afirmam que os futuros professores devem ser preparados também para atuarem como pesquisadores com seus alunos da educação básica. Os autores relatam que a maioria dos programas de licenciaturas em matemática no Brasil apresenta ainda fortes aspectos relacionados ao cientificismo, e que muitas práticas educacionais contidas nesses programas estão vinculadas ao iluminismo do século XVIII.

Fiorentini (2003) relata que, embora haja mudanças no discurso dos professores formadores, ainda o que predomina no processo de formação de professores "é a continuidade de uma prática predominantemente retrógrada e centrada no modelo da racionalidade técnica que cinde teoria e prática" (FIORENTINI, 2003, p. 9). Isso aparece, no fragmento do professor N8.8.1, que relata que "é necessária uma formação de qualidade para o professor de matemática que leve em consideração, na sua grade curricular, a modelagem matemática aplicada ao ensino médio". É possível que esse professor esteja sentindo a necessidade de mais tempo de estudo sobre a modelagem na graduação e também sobre o rompimento da racionalidade técnica, permitindo, dessa forma, a relação da teoria com a prática, principalmente com práticas voltadas para a educação básica.

Em relação ao item (ii): necessidade de uma postura diferente da tradicional, os professores apontaram preocupações que dizem respeito à prática docente com abordagens e perspectivas diferentes daquelas executadas geralmente nas escolas e, para eles, isso pode ser considerado obstáculo/dificuldade, uma vez que necessitam romper com algumas práticas tradicionais estabelecidas pela escola e lidar com situações não previsíveis, relacionadas aos problemas advindos da realidade em que os estudantes estão inseridos. Alguns fragmentos que mostram indícios de tais obstáculos:

> S5.8.1 É necessário o conhecimento, dentro de uma escola, do que é modelagem matemática, [...] e não só preocupar em vencer conteúdos didáticos para cumprir o currículo; S2.7.2 A modelagem matemática destoa das aulas expositivas com as quais os professores e alunos estão acostumados, exige uma atitude investigativa que precisa ser trabalhada e estimulada.

Esses fragmentos nos advertem para o fato de que, para desenvolver atividades de modelagem com os estudantes da educação básica, é necessário que o professor saia da "zona de conforto", como já relatado pelo professor S2.7.2. Além disso, como relata o professor S5.8.1: "é necessário o conhecimento, dentro de uma escola, do que é modelagem matemática". O fato de envolver a escola nesse processo deve ser pelo entendimento de que trabalhar a modelagem em suas aulas implica, por vezes, romper com práticas tradicionais já incorporadas pelos professores e na estrutura da escola. Talvez seja nesse sentido que o professor refere e evidencia, na sua resposta, da necessidade de a escola conhecer o que é modelagem matemática. Para o professor S5.8.1, trabalhar com modelagem é ter uma postura de "não só preocupar em vencer conteúdos didáticos para cumprir o currículo". A questão do currículo e da estrutura da escola será discutida na próxima categoria. Assim, neste momento apenas a situamos em nosso contexto.

Esses fragmentos nos mostram que a abordagem de modelagem, numa perspectiva da educação matemática, necessita de uma conduta diferente da tradicional. A resposta do professor S2.7.2: "exige uma atitude investigativa que precisa ser trabalhada e estimulada" pode estar relacionada à modelagem numa perspectiva, como descreve Barbosa (2007), em que os estudantes são convidados a indagar e/ou a investigar situações/problemas da realidade por meio da matemática e, para trabalhar com essa perspectiva na sala de aula, o professor necessita de uma mudança de postura. Tal perspectiva não contempla práticas tradicionais. Talvez isso possa ser uma das preocupações dos professores, pois eles precisam sair da "zona de conforto" para entrar numa "zona de risco", como menciona o professor S2.7.6: "A atividade de modelagem matemática pode seguir por diferentes caminhos, evocando conteúdos que não estavam previstos pelo professor".

Em relação ao item (iii): falta de discussões e reflexões teóricas sobre práticas de modelagem na sala de aula da educação básica, constatamos indícios que podem nos ajudar a entender outros fatores que indicam resistências dos professores em relação à prática de modelagem em suas aulas. Como relatado pelos professores:

> S7.8.1 Conscientização por parte do professor da importância de se trabalhar com alternativas de ensino diferenciadas; S1.8.6 Acredito que se nós estivermos "convencidos" da importância do uso da Modelagem na sala de aula, qualquer insegurança não será um impasse para seu uso.

Esses fragmentos nos mostram que a questão da conscientização e do convencimento do professor pode ser considerada fator importante para a inclusão da modelagem em suas aulas. Assim, conforme relata o professor S7.8.1, é necessária a "conscientização por parte do professor da importância de se trabalhar com alternativas de ensino diferenciadas"; é provável que esteja se referindo à modelagem matemática não como uma aplicação de uma metodologia, mas, sim, como uma concepção de modelagem, com características bem diferenciadas do ensino tradicional. Em outras palavras, o pouco conhecimento do professor sobre concepções de modelagem, na perspectiva da educação matemática, e o não convencimento da importância do seu uso na sala de aula pode ser considerado fator de dificuldade em utilizá-la em suas aulas.

Se o professor não teve uma boa base de conhecimento sobre a modelagem e uma boa discussão sobre o processo de ensino e aprendizagem com ênfase na educação básica, pode acontecer de ele se adaptar às tradicionais atividades já desenvolvidas na escola, ficando, então, sem impulso para adentrar o mundo da modelagem. Como diz Ferreira (2003): "deixando-se levar pelos modismos ou conveniências" (FERREIRA, 2003, p. 36).

E, com isso, os professores não se sentem preparados e alegam a necessidade de cursos que discutam a modelagem na educação básica. Pode ser que o conhecimento sobre modelagem não tenha sido obtido e refletido num contexto em que as ações efetuadas contemplassem a realidade da educação básica, ocasionando, assim, a falta de interesse do professor em desenvolvê-la com seus alunos. Carvalho (2001) relata que "a principal dificuldade para que os professores se envolvam realmente na implantação de propostas inovadoras é a falta de domínio de conhecimento das questões fundamentais do conhecimento" (CARVALHO, 2001, p. 10).

Dificuldades em aplicar a modelagem pela postura tradicional e conservadora do sistema escolar

Nessa categoria são discutidas questões relacionadas a (i) dificuldades com o currículo, (ii) dificuldades com a estrutura da escola e (iii) dificuldades com material didático.

Em relação a dificuldades com o currículo, ficam evidenciados, por meio das respostas dos professores, obstáculos e dificuldades que enfrentam no desenvolvimento de atividades de modelagem, alegando que existe um currículo escolar a ser cumprido e no qual as atividades já vêm planejadas por bimestre, além de que a maioria das escolas adota livro didático ou apostila. Como relatado pelos professores:

> S5.7.1 Eu trabalho em uma escola particular, onde há uma grande preocupação da direção e também dos pais em cumprir a apostila. Por isso a minha dificuldade, visto que a modelagem traz uma metodologia diferenciada para trabalhar em sala de aula; e S7.8.3 Essa característica conteudista do nosso sistema de ensino faz com que o professor tenha que empilhar conteúdos no aluno.

Essa preocupação contempla, praticamente, as falas dos outros sujeitos da pesquisa.

Fica assim evidenciadas a pressão que sofre o professor para o cumprimento do currículo já estabelecido e a preocupação em dar conta dos conteúdos abordados de forma linear. Isso reforça o que Burak (2010) explicita sobre o currículo, em relação ao “lado 'seguidor' que se desenvolve no estudante” (BURAK, 2010, p. 19, grifo nosso), que retira a possibilidade de desenvolver a sua autonomia. Diríamos mais, esse lado “seguidor” também pode ser incorporado pelo professor, dificultando, com isso, abordagens de novas metodologias.

Como relatam Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), o currículo escolar, da forma como se encontra hoje, pode ser um grande obstáculo à prática de modelagem nas salas de aula, por sua característica linear e dominante, estimulando práticas tradicionais ao ensino de matemática. Para os mesmos pesquisadores, o currículo deveria ser "em forma de espiral em que, muitas vezes, temos que fazer o movimento de ir e de voltar, o que pode acontecer de termos de 'misturar' os elementos que estão dentro das gavetas" (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011, p. 40).

Em relação às dificuldades com a estrutura da escola, são abordadas questões referentes à infraestrutura, como, por exemplo, o estado precário dos laboratórios, o número elevado de alunos por turma e a necessidade de maior número de aulas de matemática para trabalhar com modelagem. Alguns fragmentos dos professores nessa direção: N6.7.2: "laboratórios em situação precária"; N15.7.1: "estrutura precária das escolas"; S9.8.1: "implantação de uma sala de recursos no contraturno que conte com a participação da maioria dos alunos".

Ressaltamos que esses fragmentos são de professores que não trabalharam com modelagem em suas aulas e, para eles, ter uma estrutura física "adequada" e bons laboratórios são condições importantes para o desenvolvimento de atividades de modelagem. Além disso, como apontado no fragmento S9.8.1, para a implantação de uma sala de recursos no contraturno, para esse professor, são importantes os ambientes diferentes do tradicional para que a modelagem possa ser desenvolvida em sala de aula.

Esses fragmentos podem estar relacionados também à estrutura rígida da escola já estabelecida, em que, na maioria dos casos, a sala de aula é o único espaço definido pela escola. São, como dizem Tardif e Lessard (2005, p. 60), "espaços relativamente fechados (na maior parte do tempo fechados), nos quais os professores trabalham separadamente cumprindo aí essencialmente sua tarefa". E isso dificulta o trabalho com a modelagem, que necessita de outros espaços além da sala de aula.

Seguem outros fragmentos que reforçam a afirmação acima de Tardif e Lessard (2005): N10.7.1: "muitos alunos e pouca carga horária"; N15.7.2: "falta de disponibilidade de horário"; N11.7.4: "O tempo destinado às aulas que não é suficiente".

A questão do tempo e da carga horária, relacionada ao currículo, ao abordar atividades de modelagem, já vem sendo objeto de estudo e de preocupação de vários pesquisadores, dentre eles, Barbosa (1999), Silveira (2007), Silveira e Caldeira (2012), Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) e Caldeira (2015). Esses pesquisadores apontam a necessidade de mudanças no currículo para que a modelagem possa ter maiores chances de ser desenvolvida na sala de aula da educação básica. Para eles, o trabalho com modelagem na educação básica rompe com a estrutura rígida do currículo vigente, pois os estudantes são convidados a indagar e/ou a investigar situações/problemas da realidade em que estão inseridos.

Em relação a dificuldades com o material didático, os professores relatam que há pouco material didático que contemplam atividades de modelagem, e isso pode ser considerado um obstáculo ou uma dificuldade para a realização de práticas de modelagem em suas aulas. Seguem alguns fragmentos nessa direção: N9.8.1: "Material com real aplicabilidade"; S11.7.1: "Encontrar atividades compatíveis com as séries ministradas"; N12.9.1: "um número maior de materiais didáticos que focassem a modelagem matemática".

Além desses fragmentos, há outros nessa mesma direção, sendo a maioria de professores que ainda não desenvolveram atividade de modelagem em suas aulas. Assim, para eles, a falta de atividades de modelagem em materiais didáticos adotados nas escolas pode ser considerada um obstáculo. E, nesse sentido, podem fazer opção por práticas já definidas pela escola, como relatam Tardif e Lessard (2005, p. 207): "seguir um programa e tentar realizar seus objetivos". Ou ainda, como afirmam Burak e Aragão (2012, p. 9), prevalecendo um ensino "centrado na repetição e na reprodução". Em outras palavras, uma abordagem de ensino numa perspectiva tradicional, em que prevalece a opção por manter-se numa "zona de conforto". Como afirma Skovsmose (2007, p. 33-34), "o ensino tradicional de matemática é dominado pelo uso do livro-texto. [...] O livro-texto ocupa a cena".

Dificuldades em envolver os estudantes num ambiente de modelagem

Esta categoria aborda (i) práticas tradicionais incorporadas nos estudantes; e (ii) exigência de uma postura crítica e investigativa dos estudantes.

Em relação a práticas tradicionais incorporadas nos estudantes, seguem alguns fragmentos que apontam obstáculos e dificuldades no envolvimento dos estudantes em atividades de modelagem:

> S4.7.3 Os alunos não tinham o hábito de trabalhar com Modelagem. Sempre trabalharam resolvendo exercícios. Assim, quando aplicada uma situação-problema, de imediato eles querem realizar algum cálculo e encontrar uma única solução; S1.7.5 Os alunos se interessaram pela atividade e nova abordagem da Matemática, mas dificuldades quanto ao posicionamento dos alunos. Na primeira atividade sentiram-se perdidos, queriam respostas prontas, e pediam "fórmulas" ora resolver tudo.

Esses fragmentos, e outros, caracterizam indícios de práticas tradicionais, vivenciadas pelos estudantes e presentes nas estruturas das escolas vigentes, em que predomina, como afirma Mizukami (1986), o ensino centrado no professor. Nesse ensino se dá ênfase ao que é externo ao estudante, ou seja, enfatizam-se o programa, as disciplinas e o professor: "O aluno apenas executa prescrições que lhe são fixadas por autoridades exteriores" (MIZUKAMI, 1986, p. 8). E, nesse sentido, os estudantes podem estar acostumados com práticas pedagógicas nas quais o professor é o centro do processo e o estudante apenas o executa, como exposto por Mizukami.

O fragmento do professor S1.7.5, anterior, deixa evidente a predominância de experiências vivenciadas na escola pelos estudantes em atividades de matemática com caráter previsível e sequencial. Em tais atividades, o professor já sabe de antemão o resultado final e, para o estudante, basta seguir o modelo e chegar ao resultado esperado, geralmente com uma única resposta. Diferentemente, com modelagem isso não acontece, porque não existe um modelo pré-determinado que professor e alunos tenham que seguir. O desenvolvimento das atividades geralmente ocorre num campo imprevisível e proporciona aos estudantes autonomia no processo da resolução do problema e na busca de assuntos/temas de seu interesse, cabendo ao professor coordenar/orientar todo o processo.

Seguem outros fragmentos que alegam obstáculos e dificuldades em envolver os estudantes em atividades de modelagem por estarem acostumados com práticas já estabelecidas pelo currículo escolar. N4.7.1: “Os alunos não consideram”; S6.7.2: “No momento de liberdade da modelagem (principalmente na segunda etapa), eles, alunos, ficam com um pé atrás e se sentem um pouco "ariscos" com a situação”.

O fragmento “os alunos não consideram” é a resposta de um professor que não trabalhou com a modelagem em suas aulas. Esse professor leciona há três anos na educação básica. A resposta foi reproduzida na íntegra, para a questão que solicitava apontar obstáculos sobre a utilização de modelagem, caso não trabalhasse com esta em suas aulas. Esse fragmento mostra resquício de uma estrutura escolar conservadora. Como relatam Tardif e Lessard (2005), a estrutura organizacional da escola apresenta características comuns desde o fim do século XVII, estrutura que ainda se faz presente atualmente.

Em relação à exigência de uma postura crítica e investigativa dos estudantes, as respostas dos professores apontam obstáculos e dificuldades enfrentados por estudantes no desenvolvimento de atividades de modelagem, como relatam S4.9.1: “A modelagem contempla situações que exigem do aluno interpretar e pensar criticamente para apontar soluções, algo que foge do cotidiano escolar, limitado em resolver problemas”; N14.7.1: “o aluno tem que interpretar as informações”.

O fragmento do professor S4.9.1 relata que o desenvolvimento de atividades de modelagem exige dos estudantes interpretação e pensamento crítico no processo de resolução do problema e, para esse professor, isso "foge do cotidiano escolar", pois os estudantes estão habituados com práticas escolares previsíveis. Como relata S4.9.1, o tempo dos alunos fica "limitado em resolver problemas", sem se preocupar com o contexto, ou seja, como salienta Mizukami (1986, p. 13), é "um ensino caracterizado por se preocupar mais com a variedade e a quantidade de noções/conceitos/informações que com a formação do pensamento reflexivo".

O outro fragmento N14.7.1: "O aluno tem que interpretar as informações" é de um professor que não trabalha com a modelagem em suas aulas. Para esse professor, o desenvolvimento de modelagem exige outras habilidades que não são utilizadas no cotidiano escolar, tornando-se um obstáculo, para esse professor, o uso de modelagem em suas aulas.

Seguem outros fragmentos relacionados ao medo do novo, alegando que os estudantes apresentam dificuldades ao se depararem com atividades de modelagem, pois, para eles, são situações novas e os obrigam a sair da "zona de conforto", ou seja, obriga-os a romper com práticas rotineiras, realizadas na escola. Para S6.7.1:

> No início sempre existe uma desconfiança dos alunos, esses ficam com "medo" de fazer algo errado ou algo que "não pode ser feito" devido ao histórico desses sempre fazerem aquele processo de repetição "imposta" pelo professor; N1.8.1 [...] alunos encontram-se despreparados para determinadas formas de aprendizagem diferenciada, muitas vezes tendo que se voltar um pouco mais nas práticas tradicionais de ensino.

O fragmento do professor S6.7.1 deixa nítido que há dificuldades em desenvolver atividades de modelagem em suas aulas e que isso é pelo fato de os estudantes já estarem acostumados com um trabalho escolar previsível e estruturado pela escola, de “sempre fazerem aquele processo de repetição 'imposta' pelo professor”, ou seja, um ensino centrado no professor. Trata-se, como ressalta Garnica (2001), de “um processo de ensino restrito à transmissão e cumpre apenas a função de conservação” (GARNICA, 2001, p. 43).

Dessa forma, os estudantes ficam com medo de trabalhar com modelagem. Conforme relata o professor S6.7.1, eles ficam com medo de“fazer algo errado ou algo que 'não pode ser feito'”. No fragmento do professor N1.8.1, consta, como obstáculo, o despreparo do estudante para lidar com metodologias inovadoras como, no caso, a modelagem: “alunos encontram-se despreparados para determinadas formas de aprendizagem diferenciada”. Aqui fica evidenciada, novamente, a questão de sair da “zona de conforto” e de enfrentar o medo de fazer coisas que não estão contidas na rotina da escola.

E, como já mencionado, a modelagem, por sua característica, contempla uma perspectiva interdisciplinar, podendo ser desenvolvida no contexto em que os estudantes estão inseridos, por meio de situações/problemas escolhidos pelos estudantes e o professor, de forma que a resolução dessas situações/problemas possa contribuir para transformar aquela realidade. Com isso, exige-se uma postura crítica e investigativa, tanto dos estudantes como dos professores.

Considerações finais: implicações para o ensino de matemática

De modo geral, podemos inferir que as dificuldades e os obstáculos dos professores, egressos de cursos de licenciatura em matemática das IES públicas do Estado do Paraná, em relação ao desenvolvimento da modelagem em suas aulas, estão associados às quatro categorias: (i) insegurança dos professores em utilizar a modelagem em suas aulas, (ii) formação inicial insuficiente dos professores, (iii) dificuldades em aplicar a modelagem pela postura tradicional e conservadora do sistema escolare (iv) dificuldades em envolver os estudantes num ambiente de modelagem.

Tais categorias evidenciam um quadro preocupante para o ensino da matemática na educação básica, quando os professores se dispuserem a trabalhar em sala de aula, levando-se em consideração aspectos metodológicos com referência nos pressupostos da modelagem.

Percebemos claramente que as quatro categorias estão intimamente relacionadas. Não na mesma ordem em que foram apresentadas anteriormente, mas podemos inferir que tais obstáculos e dificuldades têm sua base, principalmente, em dois aspectos: a formação inicial e continuada dos professores e a estrutura das escolas. Estes dois aspectos favorecem a compreensão dos dois seguintes, gerando insegurança no professor e dificuldade em envolver os alunos em atividades de modelagem.

A questão da formação inicial e continuada dos professores fica evidenciada pela fragilidade, nos cursos de formação, em atender a outras formas de formar os professores além daquela em que busca transformar os licenciados em bacharelados. Não há espaço, nem vontade política da maioria dos cursos de formação em atender às demandas que possam favorecer uma formação menos conteudista e mais acessível aos futuros professores da educação básica. Aplica-se uma formação, evidenciando-se o conhecimento sistemático de conteúdos que pouco favorecem e atraem os futuros professores. Essa é uma situação endêmica na maioria dos cursos de formação de professores.

Preocupa-nos, sobremaneira, as questões levantadas pelos jovens egressos dos cursos de licenciatura do Estado do Paraná, em apontar as fragilidades da formação em relação específica à modelagem, mas pensamos que não seja diferente quando tais professores se propuserem a ensinar matemática por meio de jogos, história da matemática, investigações, resolução de problemas, etnomatemática e recursos tecnológicos, apenas para citar alguns deles. Tais tendências contemporâneas não têm espaço nesses cursos de formação o suficiente para, minimamente, prepará-los para o exercício da docência.

Isso, evidentemente, gera muita insegurança no jovem professor, quando do seu ingresso na escola básica. Tal insegurança se justifica porque ele não encontrou um modelo de docência que pudesse lhe proporcionar segurança o suficiente para encarar uma sala de aula, buscando novos parâmetros. Muitas vezes ele é levado para um tipo de docência, calcado naquilo que temos chamado de ensino tradicional, em que o professor apenas reproduz os conteúdos aos seus alunos, muitas vezes, reproduzindo aquilo que está nos livros didáticos, refletindo aquilo que ele tomou como modelo de aula na sua formação. As aplicações de modelagem exigem mais do que isso.

O modelo estrutural da maioria das escolas também não favorece um ensino de matemática em que se possa sair do que vem sendo produzido há séculos. Aulas cronometradas, ambientes fechados, carteiras enfileiradas, lousa, giz e avaliações mais no sentido de apontar aquilo que o aluno não sabe em detrimento daquilo que ele possivelmente possa ter aprendido. Disciplinamento e controle.

Assim, o professor, inserido nesse quadro, sente-se imobilizado diante dos seus alunos em convencê-los de que é preciso e possível mudar. Os próprios alunos, algumas vezes, não acreditam que possam aprender, se não for copiando e reproduzindo, se não for sentado enfileirado e se não for com o livro. Há resistências por todos os lados.

Assim, nossos resultados de pesquisa apontam implicações para a sala de aula em pelo menos dois aspectos: o primeiro, uma formação inicial e continuada de professores em que se proponha uma formação voltada menos para o ensino e mais para as questões da aprendizagem, em outras palavras, focar menos os conteúdos e mais os alunos; o segundo, uma escola organizada de forma que se possam privilegiar os conhecimentos científicos necessários, mas, que também tenha espaço para refletir sobre como tais conhecimentos possam ajudar na vida fora da escola.

Diante dos obstáculos apontados, consideramos que os jovens professores e aqueles que já estão atuando há mais tempo poderão encontrar nos sistemas escolares algumas “brechas” em que possam, de alguma forma, experimentar ações pedagógicas, fazendo uso da modelagem em suas aulas. Uma delas é tratar esta não como um processo contínuo ao longo do ano letivo, mas apresentar alguns "projetos" de curta duração em que temas possam ser desenvolvidos individualmente ou com outros colegas de outras áreas.

Referências

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. Modelagem Matemática na formação inicial de professores de Matemática. In: X EPREM: Encontro Paranaense em Educação Matemática, 2009, Paraná. **Anais...** Paraná: Unicentro-Guarapuava, 2009. 1 CD-ROM.

ARAÚJO, Jussara Loiola. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. In: BARBOSA, Jonei C.; CALDEIRA, Ademir D.; ARAÚJO, Jussara Laiola (orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e práticas educacionais, Recife: SBEM, v. 3, 2007, p. 17-31.

_____. Brazilian research on modeling in mathematics education. **ZDM Mathematics Education,** Karlsruhe, v. 42, n. 3-4, p. 337-348, 2010.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. O que pensam os professores sobre a modelagem matemática? **Zetetiké**, Campinas, v. 7, n. 11, p. 67-85, 1999.

______. Sobre a pesquisa em Modelagem Matemática no Brasil. In: V CNMEM: Conferência Nacional Sobre Modelagem Matemática, 2007, Ouro Preto-MG. **Anais...** Ouro Preto: Universidade Federal de Minas Gerais, 2007, 1 CD-ROM.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, São José do Rio Preto, v. 1, n. 1, p. 10-27, 2010.

BURAK, Dionísio, ARAGÃO, Rosália Maria Ribeiro de. **A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa.** Curitiba: Editora CRV, 2012.

CALDEIRA, Ademir Donizeti. Modelagem matemática, currículo e formação de professores: obstáculos e apontamentos. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 46, 2015.

CALDEIRA, Ademir Donizetti. Modelagem matemática: um outro olhar. **Alexandria**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 33-54, jul. 2009.

CARVALHO, Anna Maria Pessoa; PÉREZ, Daniel Gil. O saber e o saber fazer dos professores. In: CASTRO, Amélia Domingues de; CARVALHO, Anna Maria Pessoa de (orgs.). **Ensinar a ensinar**: didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001, p. 107-124.

CEOLIM, Amauri Jersi; CALDEIRA, Ademir Donizeti. Modelagem matemática em sala de aula: obstáculos e resistências apontados por pesquisadores brasileiros. In: VII CIBEM: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 1 a 20 set. 2013. **Anais...**, p. 7714-7721. Disponível em: http://www.cibem7.semur .edu.uy/7/actas/pdfs/302.pdf. Acesso em: 20 jun. 2016.

CREMM: **Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino.** Disponível em: http://www.furb.br/cremm/portugues/cremm.php?secao= Publicacoes&parte=start. Acesso em: jul.2013.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. A formação inicial de professores de matemática no Paraná. In: XI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. 18 a 21 jul. 2013. **Anais...**, p. 1-17. Disponível em: http://sbem.web1471. kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/166_2228_ID.pdf. Acesso em: 21 jun. 2016.

FERREIRA, Ana Cristina. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de Matemática. In: FIORENTINI, Dario (org.). **Formação de professores de matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003, p. 19-50.

FERRETI, Pedro Augusto Ghizoni; KLUBER, Tiago Emanuel. Levantamento das dissertações e teses no Paraná sobre modelagem matemática na educação matemática – 1999 a 2008: um estudo preliminar. In: X EPREM- Encontro Paranaense de Educação Matemática. 17 a 19 set. 2009. **Anais...**, p. 1-14. Disponível em: http://www.unicentro.br/editora/anais/xeprem/CC/01.pdf. Acesso em: 20 jun. 2016.

FIORENTINI, Dario. Apresentação – Em busca de novos caminhos e de outros olhares na formação de professores de matemática. In: FIORENTINI, Dario (org.). **Formação de professores de matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003, p. 7-18.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 2011.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. É necessário ser preciso? “Um estudo sobre argumentação matemática” ou “Uma investigação sobre a possibilidade de investigação”. In: CURY, Helena Noronha (org.). **Formação de professores de matemática**: uma visão multifacetada. Porto Alegre: Edipucrs, 2001, p. 49-88.

MEYER, João Frederico da Costa; CALDEIRA, Ademir Donizeti; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti. **Ensino**: as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 1986.

MORAES, Roque. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Revista Ciência & Educação**, Bauru**,** v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti. 3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1137-1150, 2012.

OLIVEIRA, Andréia Maria Pereira; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem matemática e situações de tensão na prática pedagógica dos professores. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 265-296, 2011.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.** Secretaria de Estado da Educação. Curitiba, 2008.

SILVEIRA, Everaldo. **Modelagem Matemática em educação no Brasil**: entendendo o universo de teses e dissertações. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

SILVEIRA, Everaldo; CALDEIRA, Ademir Donizeti. Modelagem na sala de aula: resistências e obstáculos. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 249-275, ago. 2012.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação crítica**: incerteza, matemática, responsabilidade. São Paulo: Cortez, 2007.

TARDIF, Maurice; LESSARD Claude. **O trabalho docente**: elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas. Petrópolis: Vozes, 2005.

Capítulo 5

Natureza do conhecimento matemático na formação de professores

João Henrique Lorin
Irinéa de Lourdes Batista

Introdução[1]

As pessoas em geral produzem ou reproduzem concepções epistemológicas plurais acerca da Matemática, seja em momentos de construir, aprender ou ensinar algum conhecimento matemático. As várias formas possíveis de como se conceber o conhecimento matemático influenciam no modo de como se ensina tal conhecimento.

Sabemos, ainda, que a maneira de um professor ensinar Matemática nos dá indícios de como ele concebe esse conhecimento. Cudmani e Sandoval (2004), em suas pesquisas, apresentaram a importância da epistemologia na formação de professores e pesquisadores de física e ensino de física e analisaram diversas experiências que incorporam tópicos de epistemologia da formação de professores e pesquisadores, apresentando a relação entre as concepções epistemológicas que os professores e pesquisadores possuem e as estratégias educativas, adotadas por eles.

[1]Apoio: Pesquisa financiada por meio de bolsa de estudos pela Fundação Araucária e Capes – Programa de Apoio à Capacitação Docente das Instituições Públicas de Ensino Superior do Paraná – Doutorado (Acordo Capes/FA).

Aqui, propomo-nos a discutir caminhos para a compreensão da natureza do conhecimento matemático e a sua contribuição na formação de professores. Partimos do pressuposto de que a História e a Filosofia da Ciência, e em específico da Matemática, têm papel fundamental nessa tarefa.

Assim como Gil Pérez et al. (2001), acreditamos que professores com formação científica devem possuir uma visão não distorcida da construção do conhecimento científico e, além disso, precisam reconhecer tais visões deformadas para poderem atuar na construção de uma acepção epistemológica acerca da natureza de ciência com seus aprendizes.

Baseando-nos em visões distorcidas de ciência que Gil Pérez et al. (2001) nos apresentam, faremos uma discutição a respeito dessas distorções na Matemática e as relacionaremos com algumas crenças, apresentadas por Machado (2011), a respeito do conhecimento matemático. Concomitantemente, discutiremos como alguns equívocos a respeito da natureza da Matemática, durante a formação de professores, podem implicar em um ensino não adequado.

As visões distorcidas de ciência e as crenças em relação à Matemática

Muitos de nós já ouvimos frases do tipo: “a matemática é exata”; “a matemática é abstrata”; “a matemática está em todos os lugares”; “quem sabe matemática já nasce sabendo”; “você precisa aprender matemática para desenvolver o raciocínio”. Esses e outros “*slogans*[2]” permeiam as representações a respeito da Matemática e podem servir tanto para justificar o sucesso escolar do aluno, quanto para o seu fracasso, como, por exemplo, afirmações do tipo “ele tem o dom da matemática!” ou “ele puxou para o pai, detesta matemática!” também são usadas para justificar o ensino de um conteúdo, exemplificado pela máxima “sem a matemática você não vive, ela está em tudo!”, ou ainda

[2] Termo utilizado por Machado (2011).

para sustentar critérios de avaliação de um professor, como, por exemplo, a afirmação: “não existe meio certo na matemática, ou é, ou não é!”.

Neste texto faremos uma apresentação e discussão a respeito dessas visões deformadas da ciência[3] e de como elas também se aplicam no contexto do conhecimento matemático.

A primeira visão distorcida é a concepção empírico-indutivista e ateórica.

> É uma concepção que destaca o papel “neutro” da observação e da experimentação (não influenciadas por ideias apriorísticas), esquecendo o papel essencial das hipóteses como orientadoras da investigação, assim como dos corpos coerentes de conhecimentos (teorias) disponíveis, que orientam todo o processo (GIL PÉREZ et al., 2001, p. 129).

É comum encontrarmos, dentro e fora da academia, o discurso ingênuo de que os “dados dizem por si só” e que basta uma observação “neutra” para que se tirem os conceitos de dado fenômeno. Destacamos os trabalhos realizados em laboratórios de ensino de Matemática, no que se refere ao tratamento dado aos objetos físicos e às possíveis observações dos alunos a estes objetos. Se trabalharmos com esses objetos como portadores de conceitos matemáticos que serão “descobertos” pelos alunos, quando forem manipulados por estes, incorreremos nessa visão distorcida de Matemática.

Por outro lado, se salientarmos o papel essencial da investigação por hipóteses, promovendo uma investigação de novos conceitos com os alunos, a partir de seus conhecimentos prévios, talvez possamos evitar ou não contribuir para essa visão distorcida da ciência e, consequentemente, abandonaremos a crença de que a “a matemática está em todos os lugares” e basta uma observação atenta que os

[3] Gil Pérez et al. (2001) apresentam sete visões deformadas da ciência, entretanto salientam que, além de não serem independentes, não são as únicas visões distorcidas a respeito do conhecimento científico.

conceitos saltarão aos olhos do observador.

A segunda visão distorcida é a denominada visão rígida ou visão algorítmica, exata, infalível:

> Apresenta-se o "método científico" como um conjunto de etapas a seguir mecanicamente. Por outro lado, destaca-se o que se supõe ser um tratamento quantitativo, controle rigoroso etc., esquecendo - ou, inclusive, recusando - tudo o que se refere à criatividade, ao carácter de ensaios, à dúvida (GIL PÉREZ et al., 2001, p. 130).

Na comunidade[4] matemática, ainda é possível encontrarmos, em discursos, que a Matemática é feita somente de algoritmos, que é exata e infalível. Essa visão é incorporada quase de maneira "natural" como parte própria da epistemologia da Matemática. Não por acaso, uma das crenças apresentadas nessa discussão foi "a matemática é exata". Essa visão distorcida, além de sustentar tal crença, ajuda a subsidiar modelos de avaliação, considerando-a rígida e estanque, e não como um processo, cerceando a criatividade e punindo o erro. É comum encontrarmos estudantes dos cursos da área de exatas[5] (ou ciências da natureza) com listas intermináveis de cálculo ou geometria para memorizar os procedimentos e regras de resolução e praticamente os transcrever em suas avaliações.

No âmbito da aprendizagem, Cudmani e Sandoval (2004) argumentam que, quando as ciências experimentais são entendidas com um corpo de conhecimento baseado fundamentalmente em algoritmos e ferramentas lógico-matemáticas e organizado em sistemas rígidos e fechados, elas orientam um ensino e uma aprendizagem caracterizados pela transmissão e recepção dos conteúdos e uma aprendizagem com uma memorização sem reflexão.

[4] Denomino de comunidade matemática professores de matemática, acadêmicos de licenciatura e bacharelado em matemática, pedagogos e pesquisadores em matemática e educação matemática.

[5] Aqui caberia uma discussão a respeito da nomenclatura utilizada pelas universidades e agências de fomento. Afinal, o que é exato? Entretanto não é esse nosso objetivo neste ensaio.

Aqui cabe uma ressalva a respeito do rigor matemático, que faz parte da natureza do conhecimento matemático. Entretanto esse rigor está relacionado à axiomatização e à formalização da Matemática. Uma hipótese explicativa possível é que essa característica do conhecimento matemático produza uma visão distorcida e também a crença de que Matemática é exata e infalível. Devemos considerar que toda axiomatização ou formalização de algum conhecimento matemático levam em conta seu domínio de abrangência.

Podemos demonstrar que a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo é 180° dentro de um domínio, o da geometria euclidiana plana. Entretanto não devemos ver esse resultado como uma verdade absoluta, irrestrita e inflexível para todo domínio do conhecimento. Basta imaginarmos esse triângulo sendo desenhado por uma criança na superfície de uma laranja para toda aquela "exatidão" de um domínio restrito se desfazer.

A terceira visão distorcida é denominada de visão aproblemática ou visão ahistórica.

> transmitem-se os conhecimentos já elaborados, sem mostrar os problemas que lhe deram origem, qual foi a sua evolução, as dificuldades encontradas etc., e não dando igualmente a conhecer as limitações do conhecimento científico atual nem as perspectivas que, entretanto, se abrem (GIL PÉREZ et al., 2001, p. 131).

Essa distorção na Matemática pode ser resultado de uma das maiores crises dos fundamentos dela[6], culminada no final do século XIX, que foi a tentativa de buscar bases mais sólidas para os seus fundamentos, abalados por outras formas de compreender o espaço por meio de outras geometrias. Nessa crise, tentaram livrar a Matemática

[6] No final do século XIX, matemáticos, lógicos e filósofos perceberam que a Matemática apresentava muitos problemas no que se refere à sua fundamentação teórica, o problema parecia tão grave, que passou a ser denominado como a crise dos fundamentos.

de qualquer influência da filosofia e outras influências externas. Na ilusão de que isso seria possível, o conhecimento matemático passa, a partir de então, pelo "desligamento da realidade".

Essa noção da Matemática favorece, por exemplo, a crença de que "a matemática é abstrata". Para Machado (2011), poucas coisas parecem ser tão naturais de distinguir no senso comum como a diferenciação entre concreto e abstrato. "De fato, parece muito simples caracterizar o concreto, o real, o palpável, em contrapartida ao abstrato, ao imaginário, ao concebido" (MACHADO, 2011, p. 47-48). Entretanto o autor ressalva que essa ideia ingênua de abstração produz alguns estigmas que levam a conotações negativas, associadas à difícil compreensão, ao interesse de poucos e que nada têm de real.

A tentativa de desligamento da Matemática de sua epistemologia, além de gerar essa visão distorcida da matemática, é a principal preocupação deste ensaio, que procura contribuir para a tese de que a compreensão da natureza de conceitos pode trazer elementos que ajudam professores e alunos nos processos tanto de ensino quanto de aprendizagem.

A quarta deformação do conhecimento consiste numa visão exclusivamente analítica.

> destaca a necessária divisão parcelar dos estudos, o seu carácter limitado, simplificador. Porém, esquece os esforços posteriores de unificação e de construção de corpos coerentes de conhecimentos cada vez mais amplos, ou o tratamento de "problemas-ponte" entre diferentes campos de conhecimento que podem chegar a unificar-se, como já se verificou tantas vezes e que a História da Ciência evidencia (GIL PÉREZ et al., 2001, p. 131-132).

A conhecida separação por "caixinhas". Cada conteúdo é ensinado de forma separada e desconectada de outras formas de conhecimento e, ainda, de outros conteúdos. O esforço em simplificar e especificar determinados conceitos pode se tornar obsoleto no momento de ensinar, caso não haja preocupação em reorganizar cada um desses conceitos específicos num contexto geral, de modo que possam ser reunificados e interligados, produzindo significados relevantes para o aluno.

Inferimos que esse tipo de visão distorcida é que norteia o comportamento de muitos professores. É comum encontrarmos professores de Matemática que sustentam os seguintes argumentos: basta ensinar os resultados matemáticos de forma analítica, expressos por seus teoremas e definições, e, a partir de então, toda sorte de problemas, sejam eles provindos da área da biologia, da economia, da física, entre outras áreas, poderão ser resolvidos sem a devida discussão a respeito da relação entres tais conceitos matemáticos e as outras áreas do conhecimento.

Petraglia (2013) sugere uma educação complexa como política civilizatória. Em vez de continuarmos a tendência de especialização do conhecimento, separando os conteúdos em suas respectivas caixinhas, devemos colocar lado a lado razão e subjetividade, partindo da noção relacional de parte e todo.

Como resultado dessa fragmentação e de uma visão linear de conhecimento científico, produziu-se uma metáfora muito utilizada na Matemática para exemplificar a construção do conhecimento matemático como a "parede dos conceitos matemáticos". Essa parede é construída tijolo por tijolo, de forma contínua e cumulativa. Relacionamos essa metáfora com a visão acumulativa de crescimento linear.

> o desenvolvimento científico aparece como fruto de um crescimento linear, puramente acumulativo (IZQUIERDO; SANMARTÍ; ESPINET, 1999), que ignora as crises e as remodelações profundas

> (Praia, 1995), fruto de processos complexos que não se desejam e deixam moldar por nenhum modelo (pré)definido de mudança científica (GIERE, 1998; ESTANY, 1990)(GIL PÉREZ et al., 2001, p. 132).

Essa visão de conhecimento contínuo e cumulativo foi bastante discutida na segunda metade do século passado por vários pesquisadores interessados no método científico, entre eles, Thomas Kuhn, Inre Lakatos, Karl Popper e Paul Feyerabend. Entretanto essas discussões foram feitas em âmbito geral das ciências.

Exemplos de trabalhos brasileiros que se propuseram a discutir alternativas a essa visão são Gilli Martins[7] (2005), Santos[8] (2008) e Lorin[9] (2009). Esses estudos apresentam discussões a respeito da epistemologia da Matemática por meio da proposta epistemológica, apresentada por Tomas Kuhn em seu livro As Estruturas das Revoluções Científicas, possibilitando uma interpretação da construção do conhecimento matemático não apenas como contínuo e cumulativo.

Quando um professor apresenta outras formas de compreender o processo de construção do conhecimento matemático, que não seja apenas como o descrito pela metáfora de tijolos sobrepostos, vai ao encontro da dinamicidade que se apresenta no dia a dia da sala de aula; das diversas formas de pensamento dos alunos, que não é apenas linear e acumulativo; das idas e vindas dos erros e acertos; dos sistemas dinâmicos e da incerteza, que estão em permanente presença nas relações de ensino e de aprendizagem.

A sexta visão deformada é a que transmite uma visão individualista e elitista, ou seja, "Os conhecimentos científicos aparecem como obras de gênios isolados, ignorando-se o papel do trabalho coletivo e cooperativo, dos intercâmbios entre equipes" (GIL PÉREZ et al., 2001,

[7] Sobre Revoluções Científicas na Matemática.

[8] O Infinito, de George Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática.

[9] Uma Revolução Científica na Matemática: do paradigma pitagórico ao paradigma euclidiano.

p.133). Entre acadêmicos do curso de Matemática, é comum encontrar quem já ouviu de colegas ou parentes que quem faz Matemática só pode "ser louco". Nos livros didáticos, frequentemente, a figura do matemático está atrelada a uma figura "excêntrica", fora dos padrões dos alunos, causando a sensação de que a Matemática é para poucos gênios. A crença de que "quem sabe matemática já nasce sabendo" ou que "a matemática é inata" tem relação com essa visão elitista de ciência.

Para Gil Pérez et al. (2001), a insistência de que a ciência, e acrescentamos aqui a Matemática, é um trabalho restrito para poucos gênios e minorias pode-se traduzir, por exemplo, em discriminação de gênero. A ciência e a Matemática são comumente apresentadas como atividades masculinas, e as presenças femininas ficariam restritas ao ensino de tais conhecimentos, sem fazer parte da produção do conhecimento matemático. Um dos resultados dessa elitização do conhecimento é a pouca visibilidade de nomes femininos.

Essa falta de identificação com os sujeitos do processo de construção do conhecimento matemático, seja nos livros didáticos, ou no discurso do professor, faz com que, muitas vezes, os alunos se sintam desmotivados para aprender conhecimentos que aparentam ser distantes e impossíveis de ser alcançados. A individualização do conhecimento matemático não contribui para uma discussão coletiva de produção de conhecimento e vai à contramão de atividades coletivas, recomendadas para o trabalho em sala de aula.

Quando elitizamos algum conhecimento, ou personificamos essa produção, estamos dizendo, para aqueles que não se veem como parte do processo, que dificilmente eles farão parte do seleto grupo da "torre de marfim". Ubiratan D'Ambrósio traz, com a Etnomatemática[10], elementos para uma discussão de um ensino que possa levar em conta o ambiente natural, social, cultural e imaginário dos alunos.

A sétima e última visão deformada a ser discutida é a que apresenta uma imagem socialmente neutra da ciência, segundo Gil Pérez et al.

[10] Pode-se conhecer um pouco a respeito da Etnomatemática no livro: "Etnomatemática: elo entre tradições e a modernidade", de Ubiratan D'Ambrósio.

(2001, p.13), “esquecem-se as complexas relações entre ciência, tecnologia, sociedade (CTS) e proporciona-se uma imagem deformada dos cientistas como seres 'acima do bem e do mal', fechados em torres de marfim e alheios à necessidade de fazer opções”. A metáfora da torre de marfim, criada para os cientistas, relaciona-se com o que já discutimos a respeito do “desligamento” com o real, uma das características da visão aproblemática e ahistórica. Também da imagem deformada do cientista como algo inatingível, criada pela visão elitista.

Cabe também aqui retomarmos a discussão dos fundamentos da Matemática e os esforços de tentar “limpá-la” de possíveis influências externas, tornando-a socialmente neutra. Essa imagem internalista de Matemática pode contribuir para um ensino descontextualizado e baseado apenas em regras de inferência, servindo como “desculpa” para professores que se negam a estabelecer relações entre os conceitos matemáticos e situações cotidianas.

Todas essas crenças, aqui discutidas, estão relacionadas com elaborações epistemológicas, identificadas desde a Antiguidade e rememoradas por outros personagens no decorrer da história. A compreensão da natureza do conhecimento matemático se torna imprescindível para um professor ou para um futuro professor, uma vez que as concepções acerca do conhecimento matemático estão intimamente ligadas com a forma como compreendemos a construção desse conhecimento e, consequentemente, influenciará no modo como ensinaremos.

As visões distorcidas, de certa forma, estão relacionadas entre si e ajudam a promover algumas crenças a respeito da Matemática. Nossa perspectiva é a de promover uma discussão e uma caracterização da Matemática, de modo a orientar a atividade de sua alfabetização. Desse modo, diante dessas visões distorcidas do conhecimento matemático, o que podemos realizar para a desconstrução de tais crenças, ou visões distorcidas?

Por uma caracterização não distorcida da Matemática

Há mais de 20 anos, Mathews (1995) escreveu que algumas instituições americanas denunciaram que o ensino de ciências nos Estados Unidos não correspondia mais às necessidades nacionais e que inserir a História, Filosofia e a Sociologia (HFS) da Ciência no escopo curricular poderia apresentar algumas respostas para tal crise.

Para Mathews (1995), a utilização da (HFS) poderia humanizar as ciências e aproximá-las dos interesses da sociedade como um todo; tornar as aulas mais interessantes e reflexivas, produzindo um pensamento mais crítico; contribuir para melhor significação do conteúdo ensinado, tratando da natureza dos objetos estudados e não só reprodução de fórmulas e equações; e, finalmente, auxiliar na formação do professor no que se refere à criação de uma epistemologia da ciência mais rica e mais autêntica.

Essa preocupação com o ensino de ciências que Mathews (1995) apresenta, e os possíveis ganhos de qualidade no ensino, caso haja uma reaproximação com as áreas da (HFS), também é partilhada por nós no caso da Matemática, e entendemos que essa reaproximação já vem sendo discutida há algum tempo na academia, entretanto com menos incidência na educação básica.

Devemos nos esforçar para que haja – utilizando o termo de Gil Pérez et al. (2001) para a educação científica – uma caracterização positiva[11] da atividade matemática. Isso implica em recusarmos a ideia de que existe *o* método científico – que muitas vezes na educação básica se traduz como a única maneira de se resolver – e reconhecer o pluralismo metodológico.

Quando Paul Feyerabend apresentou o livro "Contra o Método", mais tarde, muitos o taxaram de relativista epistemológico, ou anarquista epistemológico. Chamamos a atenção para o fato de que negar um único método científico não significa não utilizar nenhum

[11] Apesar de julgarmos que o termo "caracterização positiva" possa induzir a uma interpretação de ciência norteada pelo positivismo, resolvemos manter o termo original, utilizado pelo autor, e fazer a devida caracterização do termo que se apresenta justamente como alternativa ao método utilizado pela ciência positivista.

método científico, ou ainda, que podemos escolher qualquer método cientifico. As implicações do pluralismo epistemológico se traduzem na possibilidade da existência de verdades, e não de uma única verdade.

Outra preocupação que devemos ter, para evitar distorções a respeito da natureza do conhecimento matemático, é o que diz Chalmers em seu livro "O que é Ciência Afinal" acerca de não nos tornarmos indutivistas ingênuos: "De acordo com o indutivista ingênuo, a ciência começa com a observação. O observador científico deve ter órgãos sensitivos normais e inalterados e deve registrar fielmente o que puder ver, ouvir, etc. em relação ao que está observando, e deve fazê-lo sem preconceitos" (CHALMERS, 1993, p.23). Isto é, aceitarmos, por exemplo, que os dados falam por si mesmos, e que não precisamos interpretá-los por meio de um sistema teórico, aceito pela comunidade matemática.

Notemos que, se adotarmos a máxima do indutivista ingênuo, quando, por exemplo, um professor fosse utilizar a Modelagem Matemática[12] em sala de aula, e apresentar aos alunos dados a serem investigados, só poderia existir um único modelo a ser apreendido pelos alunos, caso contrário, os possíveis outros modelos não corresponderiam à realidade. Entretanto sabemos que poderão surgir vários tipos de modelos, cada um de acordo com as competências e capacidades de modelagem desenvolvidas pelos alunos.

Nós, professores, muitas vezes, temos dificuldade em aceitar a possibilidade de não apresentar uma resposta a determinada situação para o aluno. Consideramos quase uma obrigação o professor prever (como se fosse possível) todas as possíveis perguntas que os alunos poderão fazer em determinada aula e já reservar de antemão as possíveis respostas. Por outro lado, para alguns dos alunos, a prontidão de respostas do professor às perguntas da sala de aula lhes passa uma ilusória sensação de aprendizagem, e, possivelmente, quando o professor não responde a alguma situação, para esses alunos, o

[12] Na perspectiva da Educação Matemática.

professor cai em descrédito por não saber ou é porque a pergunta não respondida não tinha relevância. Uma visão epistemológica pluralista busca, ao contrário dessa situação descrita, promover e destacar o papel da investigação e do contraditório, evitando as respostas obtidas de forma pronta e passiva.

A cultura de que devemos ter apenas o pensamento convergente e que discussões não são bem-vindas, ainda mais quando surgem argumentos divergentes, é muito bem representada pela frase "política e religião não se discutem", ou ainda, num contexto de sala, a frase "estamos divagando muito, vamos voltar para o foco da aula". Como diria Poincaré em "A Ciência e a Hipótese", há uma grande diferença epistemológica entre conjecturar e elucubrar.

Quando primamos em proporcionar em sala um ambiente de formulação de hipóteses, admitindo a possibilidade de erros, e não exigir um raciocínio apenas em termos de certezas, contribuímos para que o conhecimento científico seja entendido como uma construção dialética entre o sujeito e o objeto do conhecimento, segundo Cudmani e Sandoval (2004). Esse modo de construção do saber se transforma de acordo com a profundidade da busca de interpretações e explicações e se orienta numa epistemologia fundamentada, por exemplo, em enfoques construtivistas de aprendizagem, que reconhecem a complexidade dos processos abertos e em permanente elaboração, presentes no ensino de ciências.

Por fim, devemos apreender que o conhecimento científico se desenvolve também para corresponder a uma necessidade social, e não é um conhecimento socialmente neutro. Sabemos que existem demandas institucionais que podem nortear o desenvolvimento científico e, também, políticas públicas para sustentar e elaborar os currículos. Sendo assim, qualquer tentativa de livrar a Matemática de influências sociais é expor os profissionais da área à incompreensão da atividade de pesquisador(a) e docente de Matemática.

Considerações finais: implicações para o ensino de matemática

Uma das nossas preocupações neste ensaio era não parecer que estamos propondo uma prescrição ou receita de bolo, com passos a serem seguidos pelos professores e/ou futuros professores. De todo modo, alguns indicativos de como evitar possíveis distorções do conhecimento matemático, decorrentes de concepções não adequadas da natureza do conhecimento matemático, foram apresentadas.

Podemos dizer que, se numa receita de bolo forem apresentadas diversas maneiras de realizar esse bolo de forma que agrade cada paladar, admitindo diversas possibilidades de bolo, inclusive dando possibilidade de refazer para aqueles bolos que não cresceram, a receita será bem-vinda.

A importância de um tratamento adequado da natureza do conhecimento matemático tem suas implicações tanto na formação científica específica do acadêmico quanto na formação docente. Propomos que o uso da História e da Filosofia da Matemática pode contribuir para esse tratamento. Para Batista (2009), o professor deve se apropriar de alguns elementos e trilhar alguns caminhos para implementar uma abordagem histórico-filosófica; produzir atividades específicas para o uso de exemplares históricos e discussões filosóficas; fundamentar suas aulas, tanto metodológica, quanto teórico-conceitualmente; investigar e conhecer reconstruções didáticas de experimentos históricos; e proporcionar atividades interdisciplinares.

Segundo Cudmani e Sandoval (2004), uma formação epistemológica de futuros professores e de pesquisadores em física e em ensino de física pode contribuir em muitos aspectos que nós acreditamos ser os mesmos para a formação de professores de matemática. De fato, poderá ajudar o sujeito a não ser prisioneiro de uma filosofia incoerente e adotada de forma inconsciente; não confundirá o que se postula com o que se deduz; habituar-se-á a explicar as suposições e hipóteses, permitindo saber corrigir quando uma teoria não responde satisfatoriamente aos problemas levantados pelos fenômenos. O professor também se acostumará a organizar sistematicamente as ideias e a melhorar as linguagens; afiará seu "bisturi" crítico, precavendo-se de cair no dogmatismo; poderá melhorar suas estratégias de investigação; sua atenção se deslocará do resultado para o problema; Filosofia e História da Ciência poderão mudar sua visão de constituição do conhecimento meramente aditiva; agirá com cautela, quando se tratar de um novo terreno a ser estudado, não caindo em um indutivíssimo ingênuo ou na mera aplicação de hipóteses *ad hoc*.

Para finalizar, acreditamos em um ensino baseado em formulações de perguntas, lembrando que a resposta encerra uma discussão, enquanto que uma pergunta a inicia.

Referências

BATISTA, Irinéa de Lourdes. Reconstruções histórico-filosóficas e a pesquisa interdisciplinar em educação científica e matemática. In: BATISTA, Irinéa de Lourdes; SALVI, Rosana Figueiredo (orgs.). **Pós-Graduação em ensino de ciências e educação matemática**: um perfil de pesquisas. Londrina: Editora Eduel, 2009.

CHALMERS, Alan Francis. **O que é ciência afinal**? São Paulo: Brasiliense, 1993.

CUDMANI, Leonor; SANDOVAL, Julia Salinas. Historia y Epistemología de las Ciencias: ¿Es Importante la Epistemología de las Ciencias em la Formación de Investigadores y de Profesores en Física? **Enseñanza de lasCiencias**, Barcelona, v. 22, n. 3, p. 455-462, 2004.

GIL PÉREZ, Daniel; MONTORO, Isabel Fernández; ALÍS, Jaime Carrascosa; CACHAPUZ, Antonio; PRAIA, João. Por uma imagem não deformada do trabalho científico. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 7, n. 2, p. 125-153, 2001.

GILLI MARTINS, João Carlos. **Sobre revoluções científicas na Matemática**. Rio Claro, 2005. 175f. Tese de Doutorado – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 2005.

LORIN, João Henrique. **Uma revolução científica na matemática**: do paradigma pitagórico ao paradigma euclidiano. Maringá, 2009. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, 2009.

MACHADO, Nilson José. **A matemática e a língua materna**: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 2011.

MATTEWS, Michel. História, filosofia e ensino de ciências: a tendência atual de reaproximação. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 12, n. 3, p. 164-214, 1995.

PETRAGLIA, Izabel. **Pensamento Complexo e Educação**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

POINCARÉ, Henri. **A ciência e a hipótese**. Brasília: Editora da UnB, 1988.

SANTOS, Eberth Eleutério dos. **O infinito de Georg Cantor**: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática. Campinas, 2008. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, 2008.

Parte 2
Práticas Educativas em Matemática

Capítulo 6

A mediação para surdos inclusos nas aulas de matemática por intérpretes de libras: uma ação interlínguas?

Fábio Alexandre Borges
Clélia Maria Ignatius Nogueira

Introdução: considerações sobre o panorama atual da educação inclusiva de surdos

Ao pensarmos acerca da inclusão educacional, alguns aspectos devem ser cuidadosamente considerados. A escola, historicamente, serviu como uma "fonte de exclusão para muitos alunos que, quase sempre, viram confundidos com falta de motivação, indisciplina ou falta de inteligência, a incompatibilidade entre os seus valores, ritmos e interesses com os que eram veiculados pela escola" (RODRIGUES, 2005, p. 48). E, se a escola não inclui satisfatoriamente seus alunos sem nenhuma necessidade educativa especial, com o ingresso de educandos surdos, com deficiência visual, cadeirantes, entre outros, a possibilidade de inclusão se reduz, caso não haja significativas mudanças nas estruturas física e organizacional escolares.

Em uma escola que se propõe inclusiva, as especificidades culturais, físicas, psicológicas de cada educando devem ser consideradas. Caso contrário, corremos o risco de excluir nossos alunos em um lugar que deveria ser essencialmente inclusivo: o interior da sala de aula. No caso particular dos alunos surdos, notamos uma barreira, que não é física, mas que existe e se opõe a uma escolarização de boa qualidade para esses educandos: dentre todas as estratégias metodológicas disponíveis ao professor em uma aula, ainda hoje a comunicação oral é o principal recurso adotado. Diante disso, a inclusão desses estudantes é problemática, pois esses sujeitos possuem a comunicação prejudicada em um ambienteque utiliza uma língua que não lhes é acessível em sua forma oral e que eles não dominam em sua forma escrita. A situação fica mais complexa quando se trata do ensino de matemática, que pressupõe a inclusão no cotidiano escolar de mais uma linguagem: a linguagem matemática.

O fato de que a Matemática possui uma linguagem própria é um complicador mesmo em situações educacionais bilíngues com o apoio do Intérprete de Língua de Sinais (ILS), em função da existência de termos que não são diretamente traduzidos em Libras[1] (logaritmos, matrizes, funções etc.). Isso porque esta ainda é uma língua em construção, o que, aliado ao conhecimento matemático quase sempre superficial do ILS e que o impede de uma interpretação contextual, dificulta sobremaneira a compreensão do conhecimento matemático pelo aluno surdo. Ademais, a Matemática discute saberes abstratos e retira da língua natural a denominação de seus objetos com significados distintos daqueles assumidos no cotidiano, gerando, por vezes, interpretações equivocadas, por estarem sustentadas no significado coloquial da palavra utilizada.

Essa foi, portanto, a motivação para o desenvolvimento da investigação que é apresentada neste capítulo: como se efetiva a mediação por uma ILS sem formação em Matemática, de aulas desta disciplina, para dois alunos surdos de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental?

Lacerda (1996), ao discutir os "processos dialógicos entre aluno surdo e educador ouvinte", aponta alguns aspectos que merecem

[1] Língua Brasileira de Sinais, a língua utilizada pelo surdo brasileiro e também aquela utilizada na sua inclusão educacional.

atenção quando da presença do ILS em salas de aula, dentre eles: um conhecimento superficial dos sinais pelo ILS; uma simulação de entendimento dos conceitos por parte do aluno surdo; a ausência de uma discussão de temas curriculares em sala, sendo que, normalmente, há um redimensionamento na discussão desses temas pelo ILS, que se restringe a poucas informações "soltas"; além de um "deslizamento de sentidos", marcado ora por um conhecimento parcial da língua escrita, ora por um conhecimento parcial dos sinais da Libras.

Com esses apontamentos iniciais, intentamos justificar este capítulo no sentido de acrescentarmos subsídios às discussões que atualmente estão ocorrendo sistematicamente sobre o ensino de matemática para alunos surdos inclusos, mediado por intérpretes de Libras.

Os sujeitos, o ambiente e os procedimentos metodológicos

Considerando que a atuação de uma ILS na sala de aula extrapola os aspectos linguísticos, adquirindo também contornos pedagógicos, procuramos, com esta investigação, identificar se haveria adaptações/modificações/interferências por parte da intérprete no conhecimento matemático, discutido pela professora da turma.

A escola investigada é pública/estadual, localizando-se na região noroeste do Estado do Paraná. Contava no ano da pesquisa com 1.700 alunos, sendo que, destes, 13 eram surdos. Sobre possíveis atendimentos destinados aos alunos surdos, a escola oferecia apenas o trabalho dos profissionais intérpretes de Libras. O início da inclusão de alunos surdos naquela escola se deu em 2002, sendo que, desde esse ano, a escola contava com os intérpretes de Libras.

A ILS que trabalhava na escola foi contratada pelo Estado do Paraná havia oito anos. ILS fez duas graduações, uma em Ciências Contábeis e outra em Pedagogia. Para poder atuar como intérprete, realizou cursos de Libras, tendo sido também aprovada no exame nacional de proficiência na língua (PROLIBRAS).

A professora de Matemática da escola envolvida na pesquisa também atuava havia oito anos, sendo aquela a sua primeira experiência com alunos surdos. Sua formação inicial foi em Licenciatura em Ciências, com habilitação para o ensino de matemática. Segundo ela, também não havia participado de cursos de Libras, não sendo usuária dessa língua.

A turma em que os dois alunos surdos observados estudavam era composta por 32 alunos no total. Um dos alunos surdos (Fe) tinha 18 anos de idade, com um grau de perda auditiva entre moderada à profunda e bilateral. Fe foi parcialmente oralizado e é fluente em Libras. O outro aluno surdo (Do) tinha 16 anos de idade, com um grau de perda auditiva profunda e bilateral. Do não era oralizado e utilizava fluentemente a Libras. Os dois alunos estudaram em escola especializada no atendimento de surdos até a 5ª série do Ensino Fundamental (atual 6º Ano) e estudavam havia quatro anos nas mesmas turmas. Destacamos que, apesar de os dois alunos surdos terem recebido atendimento educacional especializado até o 6º ano, bem como terem contado, a partir daí, com a mediação de um ILS em situação inclusiva, os dois se encontravam em defasagem etária em relação aos demais colegas ouvintes.

A professora trabalhou os temas matemáticos com uma abordagem tradicional, ou seja, por meio de uma sequência: definições/fórmulas matemáticas, seguidas de exemplos e exercícios similares para a resolução pelos alunos. Ao final dos exercícios, a professora realizava a correção de todos eles, inclusive das atividades deixadas para que fossem realizadas em casa. Os temas matemáticos abordados foram, basicamente, as equações do 2º grau e as diferentes possibilidades de soluções.

Durante três aulas de Matemática, captamos, por um gravador de áudio, a fala da professora e, com uma filmadora, a interpretação simultânea da ILS com a intenção de identificar se haveria, por parte da ILS, adaptações/modificações/interferências no conhecimento matemático, discutido pela professora com a turma. Os sinais da ILS, gravados em imagem, foram, posteriormente, traduzidos para o português por outra intérprete de Libras, utilizando um aparelho gravador de áudio.

Após a análise das falas da professora e da ILS, identificamos as características mais marcantes que nos possibilitariam responder à nossa indagação inicial e que estiveram presentes nas três aulas observadas, estabelecendo, então, o que denominamos de unidades de análise, as quais apresentamos e discutimos a seguir. Utilizamos fontes em itálico para apresentar as transcrições das falas da professora e da ILS. Nos casos em que aparecem falas dos estudantes, estas são apresentadas entre colchetes ([...]).

Nossa análise das unidades

a) O tradicionalismo matemático nas aulas que abordam temas algébricos como um complicador do aprendizado pelos alunos surdos

O tema abordado nas três aulas observadas foi equações do 2º grau. Em tópicos algébricos, é comum que as aulas ocorram em um formato mais tradicional, no sentido de que não se buscam alternativas diferentes daquelas comumente vivenciadas nas escolas, ou seja: o professor apresenta uma definição matemática, realiza alguns exemplos e, na sequência, pede para que os alunos repitam o mesmo procedimento, com exercícios semelhantes aos exemplos. Pesquisas como a de Lautenschlager e Ribeiro (2014) corroboram essa característica que vimos observando nas aulas com temas algébricos. Analisando as transcrições das falas da ILS e da professora, pudemos observar essa característica. Relatamos a seguir alguns dos momentos que compõem esta parte da introdução ao tema equações do 2º grau. No início do primeiro encontro, temos a fala da professora:

> PROFESSORA: Então vamos lá, oh. Equações do 2º grau com 1 incógnita. Equações do 2º grau vão

> ser equações que vão ter o expoente 2. Por isso que é do 2º grau porque tem o "doizinho" em cima. Então olha, exemplo. Isso aqui é uma equação do 2º grau porque tem o expoente 2. Se for o expoente 3 é equação do 3º grau. Se não tiver expoente, se for só assim é uma equação do 1º grau ta?

Simultaneamente, ILS interpretou o trecho da seguinte maneira:

> ILS: Vamos começar a explicar um novo tema, Equações. Nome icógnita (sic), o quê? O quê é o nome icógnita (sic)? Significa letras que você não conhece o valor. x tem x elevado ao número 2. Nome Equações. 2 é 2º grau. Se tiver 3, 3º grau, 4 e assim por diante. x elevado a 2, sempre 2º, mostra o 2, sempre o número 2 elevado ao número 2 pequenininho, 2º grau, ok? Sempre mostra o elevado ao número, esse número sendo elevado isso apresenta a equação do 2º grau, esse 2.

Percebemos a preocupação de ILS já nesse início com palavras, provavelmente, até então desconhecidas pelo aluno surdo, como no caso de incógnita (soletrada em Libras como icógnita). Na fala da professora, ela não se preocupou em explicar tal termo, mas ILS sentiu-se responsável em fazê-lo em sua interpretação. Mais adiante na transcrição, notamos a apresentação dos termos a, b e c, que fazem parte da equação do 2º grau e também servem para definir uma equação como completa ou incompleta. Nas palavras da professora, temos:

> PROFESSORA: Agora nós vamos ver aqui quando ela é completa ou incompleta. Uma equação do 2º grau completa é quando tem os três termos. Olha: 1, 2, 3. Os termos vão ser separados

> pelo sinal de + e de -. Então essa equação ela está? [completa]. Completa. [completa por quê?] Tem os três termos: 1, 2, 3.

A professora se refere aos sinais de + ou de – como elementos que servem para separar os termos componentes da equação do 2º grau, sem fazer, nesse início, uma relação desses sinais com os próprios componentes a, b e c, ou seja, esses sinais devem vir diretamente relacionados com os números que representam os componentes. Como exemplo, ela utilizou a equação $4x^2 + 3x - 2 = 0$. Nesse caso, o ideal seria afirmar, desde o início, que o + se refere ao componente b, que é + 3; o – se refere ao componente *c,* que é – 2. Já os sinais da ILS trataram o mesmo trecho da seguinte maneira:

> ILS: Exemplo: agora estou mostrando uma equação, o que falta na equação? Exemplo: são 3 elementos, x^2, x e um número. Ela está toda igual a 0. Nós dizemos que é uma equação completa. Porque tem os 3 elementos, completa. Se mostrar só 2 elementos, x^2 e x, nós dizemos que é incompleta. Falta, tem 2 mas falta, se tiver 3 está certo, é completa.

A ILS não demonstra em sua interpretação o destaque dado aos sinais de + e de –, feito pela professora. Por outro lado, a intérprete já se preocupou também em antecipar os casos em que a equação poderia se apresentar da forma incompleta. Todavia, ao acrescentar que, se houver três termos, está certo, induz a que o aluno considere que equações incompletas não sejam certas. Na continuação da primeira aula, a professora apresentou aos estudantes a fórmula geral da equação do 2º grau, conforme segue em suas palavras:

> PROFESSORA: “Uma equação do 2º grau com

> uma incógnita x pode ser escrita da seguinte maneira: $ax^2 + bx + c$. Olha, esse aqui é o termo geral da equação. No lugar do a, do b e do c, são os números. No lugar do a, do b e do c são os números que nós vamos substituir". Já a ILS abordou o mesmo trecho da seguinte maneira. ILS: "Por exemplo: ax^2 você vai somar $bx + c = 0$. Depois, substituir o a, o b e o c por números. a quantos? b quantos? c quantos?"

Em explicações como essas, dadas pela professora, podemos induzir o aluno a pensar que qualquer número pode ser colocado em substituição aos termos a, b e c, ou seja, até esse momento não havia sido abordado o fato de que existe uma igualdade que precisa ser respeitada, o que define uma equação. Na sequência, ela mesma resolveu um exemplo e, feito isso, deixou algumas atividades a serem desenvolvidas pelos alunos.

Também no trecho a seguir, referente à transcrição da ILS, outra característica de aula tradicional, da maneira como estamos entendendo, fica clara, quando a ILS pede para o aluno surdo apenas comparar o que ele havia desenvolvido para determinada atividade, com a correção feita pela professora na lousa. Na transcrição da ILS, caso o aluno surdo tenha errado na atividade, seu erro não poderá ser questionado, ou mesmo contribuir para o entendimento das suas ideias particulares com relação ao exercício. ILS: "Agora compare com o que o professor está corrigindo, compare. Está certo. Compare, se não está certo corrija".

A questão da dificuldade com a qual se apresentam os temas relacionados à álgebra ficou evidente. Não notamos, por parte da professora, preocupação maior com os significados que poderiam ser atribuídos pelo aluno aos elementos algébricos. Entendemos que sua abordagem, a qual classificamos neste texto como tradicional, pode aumentar ainda mais as dificuldades enfrentadas por estudantes, sejam eles ouvintes ou surdos.

Nesse sentido, a atitude da professora corrobora os resultados da investigação de Santos (2007), que analisou o discurso de professores e alunos acerca do tema álgebra, concluindo que existe um acompanhamento ritualístico dos livros didáticos como uma regra de ensino, num desenvolvimento extremamente mecânico quando se trata desse assunto.

Sala, Espallargas e Campo (1996) analisaram especificamente as estratégias de ensino mais bem adequadas aos estudantes surdos. Para os autores, o Ensino Fundamental apresenta um passo importante quando da apresentação do tema álgebra. Segundo eles, "con la introducción del álgebra se da un paso fundamental en la ampliación y consolidación del lenguaje matemático formal, retrocediendo la importancia de la lengua vernácula en favor de este" (SALA; ESPALLARGAS; CAMPO, 1996, p. 77). Para os autores, o ensino de álgebra é entendido como de difícil compreensão para todos os alunos, com maiores dificuldades ainda para os surdos, já que as letras utilizadas podem assumir diferentes funções (generalizadoras do cálculo aritmético, incógnitas, variáveis etc.).

Um dos exemplos abordados por Sala, Espallargas e Campo (1996) é o uso das potências e raízes ditas canônicas, de grau 2 ou 3. Os termos quadrado e cubo são dotados de uma significação geométrica, previamente conhecida pelos estudantes, mas que também possuem outros significados em contextos matemáticos diferentes.

Diante do tradicionalismo vivenciado nas aulas observadas, quando do ensino de temas algébricos, podemos afirmar que não houve nenhum tipo de preocupação em desenvolver uma metodologia de ensino que favorecesse a construção do conhecimento matemático pelo aluno surdo, como, por exemplo, maior exploração visual, como recorrer à álgebra geométrica.

b) O descompasso entre a aula da professora ouvida e a sinalizada

Ao realizarmos as duas transcrições, obtivemos dez páginas para os dois casos, o que poderia indicar uma boa similaridade entre os dois diálogos, aquele que vem direto da fonte oral e o outro, interpretado. Contudo, assistindo detalhadamente às gravações das imagens da ILS, ficam nítidos alguns aspectos que nos levam a apontar a existência de um descompasso entre essa vídeogravação e a gravação do áudio da fala da professora. Em outras palavras, notamos momentos em que a professora continuava a discutir as atividades e a intérprete se mantinha em silêncio, e, da mesma forma, momentos em que a professora não estava falando, mas a intérprete continuava as discussões com os alunos surdos.

Não temos as imagens dos alunos surdos, mas acompanhamos presencialmente as gravações e observamos, na maioria desses casos, momentos em que o aluno surdo precisava copiar as atividades e/ou correções para manter atualizado o seu caderno e, no entanto a professora continuava a falar. Da mesma forma, tivemos momentos em que a professora não estava se pronunciando, mas a ILS permanecia em diálogo constante com os surdos.

Nos momentos de dificuldades dos alunos surdos em compreender o desenvolvimento dos exercícios, a ILS permanecia em constante interação, de modo que os surdos não podiam refletir sozinhos acerca dos exercícios. Nesse caso, fica nítida a ideia de que os alunos surdos já estavam acostumados com esse fato, ficando dependentes da ILS na maioria do tempo destinado às resoluções. A ILS costumava antecipar o passo a passo dos exercícios, não dando tempo suficiente para que os alunos os desenvolvessem sozinhos. Os surdos também demonstravam a necessidade constante de confirmar aquilo que haviam escrito no caderno, o que era feito, porém, sempre se voltando para a ILS e não para a professora. Segue um trecho da transcrição dos sinais da ILS, para ilustrarmos essa necessidade de interação constante entre surdos e intérprete durante a resolução dos exercícios.

> ILS: O terceiro exemplo, 1 2 3, exemplo, exemplo, exemplo, certo. Pode, pode, pode. De novo, invente uma outra. Livre. Igual a 0. Certo, vírgula. Pode x, x pode. Pode estar escondido, só o x, é oculto, número oculto. Acabou. Próximo, o c. O segundo é 0 porque mostra x^2, Que número? Letra com número não tem! Então invente a terceira agora. Somado com número. Só. Letra não tem. Número só qualquer, você é livre! Igual a 0. Vírgula, invente outra, isso.

Devemos considerar que esse tipo de atitude da ILS e dos alunos surdos deriva de outras condições impostas nas aulas de Matemática por nós observadas (aulas tradicionais, ausência de questionamentos voltados para os alunos – ouvintes ou não – falta de interação entre ouvintes e surdos etc.), conforme ilustrado abaixo por um trecho da transcrição da fala da ILS:

> ILS: Equação do 2º grau e incógnita. 1º elemento e o 3º elemento, a falta o 3º elemento, c. Primeiro é a, por exemplo, o a é 2, o b é 1, só x, e o c não tem, então significa que o c é 0. Depois vou mostrar um outro exemplo, vocês podem copiar, pode copiar tudo junto. Depois do exemplo, o a, que é o a? Qual é o número do a? Que valor que acompanha a? a é elevado ao quadrado, que é 1. Não mostra, se não mostra número é 1, porque está oculto, e o b significa 0 porque não tem. E o c, 6, igual a 0.

No trecho anterior, a ILS antecipa quais seriam os números referentes aos termos “a”, “b” e “c” que formam uma equação do 2º grau. Simultaneamente aos passos a serem realizados pelo aluno, a ILS também vai reforçando algumas ideias, como quando afirma que o valor numérico representado por "a" será sempre aquele que acompanha o termo x^2.

Para ilustrarmos o descompasso entre os sinais da ILS e a fala da professora, podemos utilizar como exemplo a segunda aula observada, quando a transcrição da fala desta última ficou bem menor com relação à transcrição dos sinais da ILS, o que corrobora o que já vimos discutindo nesta unidade de análise.

Cabe lembrarmos a discussão promovida por Gurgel (2010) sobre o fato de que a fala dos ouvintes, na maioria das vezes, é rápida, o que aumenta as dificuldades de interpretação em Libras. Quando isso acontece, fica nítida uma despreocupação dos professores em se adaptar quando da presença de alunos surdos, conforme verificado também por Tartuci (2002). O ritmo das aulas, em nossas observações, foi ditado pela maioria ouvinte.

c) Some, corta, tira: o uso de termos inadequados nas aulas de Matemática e a ampliação da percepção do "estrangeirismo" dos surdos

Esta investigação nos permitiu identificar o quanto os professores de Matemática e, por consequência, também os intérpretes de Libras, fazem uso de palavras que, muitas vezes, não transmitem ao estudante o real significado de determinados procedimentos comuns nas atividades, nos algoritmos. Em nossas transcrições, tanto a professora quanto a ILS usam termos muitas vezes inadequados para a compreensão dos reais significados matemáticos que estariam por trás do desenvolvimento de um algoritmo. Ilustramos esse fato com os trechos a seguir. Primeiramente, no caso da professora, selecionamos cinco trechos de diferentes momentos:

> PROFESSORA: Por isso que é do 2º grau porque tem o doizinho em cima.
> PROFESSORA: Então, por exemplo, nessa letra a

> aqui, qual é o número que está acompanhado com o x^2? Quando não aparece é o que? [1] 1.
> PROFESSORA: E o c é sempre o número que está sozinho, que não tem letra.
> PROFESSORA: Sempre quando tiver menos junto do número o menos vai junto com o número.
> PROFESSORA: O c eu não tenho então eu já coloco igual a zero.

Com relação ao segundo trecho, a professora não discutiu o fato de x^2 e $1x^2$ serem iguais, ou seja, o número 1 é o elemento neutro da operação de multiplicação. No último trecho, entendemos que a professora não deveria simplesmente afirmar que não há o elemento “c” na equação. Poderia, ao invés disso, tratar do zero como elemento neutro da adição e/ou subtração.

A questão se complica ainda mais quando da interpretação dos termos inadequadamente utilizados pela professora de matemática, em função da necessidade da adaptação para a Libras de termos presentes na linguagem coloquial, mas utilizados no contexto matemático com significados diferentes, o que demandaria da ILS um conhecimento mais aprofundado do assunto abordado, conforme pode ser inferido do trecho a seguir:

> ILS: Agora some, some todos, some. O denominador igual, em cima o numerador.
> ILS: [...] invente o valor, qualquer um, mostre um [...].
> ILS: [...] vai substituir em x, e tirar e colocar [...].
> ILS: Por exemplo: **a** qual o número mostra, não mostra nada, só **a** significa 1, porque está escondido, está oculto, 1 o **a**.
> ILS: Em Matemática você vai pegar um valor, por exemplo, 2, você vai tirar a letra e vai colocar o 2 elevado a 2.

No primeiro trecho, a ILS tentava fazer com que o aluno surdo relembrasse o algoritmo utilizado para encontrar o menor múltiplo comum a um conjunto de números, procedimento necessário quando da operação com números fracionários. Já no quarto trecho, como a professora não discutiu o fato de o número 1 representar o elemento neutro da multiplicação, consequentemente, a ILS também não o fez. No caso desta última, palavras como escondido e oculto foram adotadas, semelhantemente à fala correspondente da professora.

Todo estudante, ao ingressar na escola, tem dificuldade na passagem de uma língua materna, cotidiana, para o uso da língua culta, utilizada pelos professores, dificuldade que se acentua, quando da introdução da linguagem matemática formal. No caso dos surdos, a questão se complica, visto que essas crianças, em sua maioria, ainda não são fluentes em Libras ao ingressarem na escola, em razão de não possuírem um ambiente linguístico que favoreça a aquisição dessa língua, e também não dominam o português oral ou escrito. Tal fato gera, por si só, uma dificuldade ainda maior quando da transição para a linguagem matemática, já que, neste caso, estão envolvidas três formas diferentes de comunicação: a Libras, o Português e a linguagem matemática. No caso do aluno ouvinte, o que acontece é uma conversão da língua natural (Português) para a linguagem matemática, enquanto que, no caso do aluno surdo, há uma conversão do Português para a sua língua natural, a Libras, para só então ocorrer a passagem para a linguagem matemática.

d) A limitação do diálogo dos alunos surdos à intérprete de Libras

Em todas as aulas observadas, ficou clara a ideia que afirmamos no subtítulo desta presente unidade de análise: os surdos ficam limitados, no interior da sala de aula, aos diálogos com a intérprete. Mesmo em momentos de maior descontração, como nas trocas de professores, não observamos alunos ouvintes se dirigindo aos alunos surdos. No caso da professora, foram raros os momentos de tentativa de diálogo, porém, nessas tentativas, ela se dirigia diretamente à ILS, nunca aos alunos surdos.

Cabe lembrar que os alunos surdos observados são adolescentes, que ficam limitados a dialogar com um sujeito adulto (os intérpretes), com características diferentes dos jovens, interesses pessoais diferentes etc. E, mesmo que a escola procurasse criar mecanismos para favorecer essa interação entre alunos surdos e ouvintes, a defasagem etária entre os surdos e os ouvintes dificultaria a existência de pontos de interesse comuns, sem levar ainda em consideração as diferenças inerentes entre a cultura surda e a ouvinte. Comecemos nossas exemplificações por meio de comentários diversos, de questões cotidianas, nas quais os alunos surdos estavam se dirigindo, em todas elas, para a ILS:

> ILS: Está chovendo, está chovendo muito (rsrsrs). Eu percebi. Cuidado heim, pra ir embora pra casa, cuidado com a chuva.
> ILS: Depois em casa treine mais, faça mais exercício, do "a" sobre "c", é importante pra você aprender.
> ILS: Ah eu adoro, adoro Libras, adoro. Nunca fui em Maringá. Legal. Depois você me explica quando eu voltar.
> ILS: Escuro fica melhor, claro atrapalha ver. Fica melhor, escuro fica melhor.

Também tivemos diversas situações em que o aluno surdo, ao apresentar dúvidas acerca do conteúdo matemático discutido, não se dirigia à professora. Em vários desses momentos, ILS incentivou o aluno surdo a questionar, verificar se as suas ideias estavam corretas, ou mesmo convidá-lo a expor sua compreensão. Porém, na maioria das vezes em que essas situações ocorreram, o aluno surdo se limitou a dialogar com a ILS, o que acabava por deixar a intérprete com dupla tarefa, a de interpretar e a de ensinar matemática. Alguns exemplos vêm a seguir, retirados da transcrição dos sinais de ILS: “Você entendeu? Não conseguiu? Se não conseguiu pergunte. Pode perguntar”. ILS: “Olhe lá, entendeu? Não conseguiu? Você pode perguntar. Não conseguiu? Pergunte à professora”.

Com a ausência de interação direta entre os alunos surdos e a professora, somos levados a pensar que o aluno surdo estaria simulando o acompanhamento das atividades escolares, “afinal, todas aquelas pessoas parecem acreditar que ele é capaz” (LACERDA, 2006, p. 176).

Sobre os trechos de diálogos elencados no primeiro grupo de exemplos da presente unidade de análise, cabe relembrar Cechinel (2005), que também identificou situação semelhante em sua pesquisa com alunos surdos, inclusos no Ensino Superior. Sejam diálogos acerca dos temas matemáticos, ou mesmo as questões cotidianas (como a chuva que cai, viagens realizadas etc.), também em nossa investigação não verificamos uma interação satisfatória entre alunos ouvintes e surdos, ou mesmo entre a professora e os alunos surdos. Ao ficarem limitados ao diálogo com a ILS, as trocas simbólicas, necessárias ao avanço cognitivo, e mesmo a ampliação dos conhecimentos escolares ficam também limitadas, prejudicando sua experiência escolar, no sentido de que eles não podem ouvir nem transmitir para seus colegas ouvintes suas experiências sociais fora da sala de aula, ou, pior ainda, até mesmo dentro dela.

Cabe ressaltar também que a docente não sabia se comunicar, mesmo que minimamente, em Libras. Nesse sentido, apoiamo-nos em Lacerda (2005) para alertar sobre a importância de que os profissionais da educação, envolvidos com a inclusão de alunos surdos, aprendam a Libras, já que a responsabilidade quanto ao ensino não pode ser delegada a uma pessoa que não é professora de Matemática, no caso, a ILS. Nesse sentido, Fávero e Pimenta (2006) não atribuem apenas às dificuldades de comunicação o insucesso dos surdos na aprendizagem de matemática, “mas também à forma como a escola media o conhecimento matemático, acrescido da falta de proficiência em Libras do professor que lida com os surdos” (FÁVERO; PIMENTA, 2006, p. 17).

e) Os questionamentos e esclarecimentos de dúvidas apenas entre os ouvintes

Apoiando-nos em Sala, Espallargas e Campo (1996), para quem a escola é um espaçode diálogos, consideramos uma grande barreira à inclusão dos alunos surdos o fato de termos observado a inexistência de diálogos entre estes e os ouvintes. Se tivermos como hipótese que, para haver ensino e aprendizagem, há que se terem questionamentos e esclarecimentos das compreensões particulares acerca dos temas escolares, as três aulas observadas na intervenção realizada nos levam a pensar na necessidade de uma modificação urgente no nível de atenção dispensada aos surdos inclusos. Em outras palavras, devemos modificar nossas ideias de inclusão para que os surdos possam efetivamente participar das aulas.

Apesar da grande relação entre a presente unidade de análise e a anterior, enfocamos aqui mais especificamente a ausência de interações que favoreceriam a compreensão dos temas matemáticos em questão. Ou seja, nas situações em que houve discussões entre os alunos ouvintes e a professora, os alunos surdos não apenas não participaram como sequer tiveram acesso à discussão que estava sendo efetuada.

> PROFESSORA: Com quantas incógnitas? [2] Uma só, tá, olha. Mesmo que aparece duas vezes é uma incógnita só porque é só x. Quando que vai ser duas? [quando aparecer duas diferentes]. Isso. Aí eu tenho duas incógnitas que é o x e o y. Agora quando eu só tenho um tipo de letra aí vai ser com uma incógnita só. [por quê todas elas terminam em 0?] Porque o valor depois quando nós começarmos a resolver, descobrir o valor do x, esse valor que

> nós vamos colocar aqui no x nós vamos resolver e tem que ficar igual a 0. Então olha só, entenderam gente? Quando é uma equação do 2º grau com uma incógnita? [é quando tem duas letras diferentes] Não. Com uma incógnita é quando tem a mesma letra, olha.

Observamos no diálogo apresentado que ocorreram questionamentos da professora aos alunos, os quais foram respondidos pelos alunos ouvintes, bem como questionamentos dos alunos ouvintes respondidos pela docente. Tratou-se de um momento importante, no qual, todos aqueles que tiveram acesso ao diálogo e estiveram atentos tiveram a oportunidade de esclarecer suas dúvidas que, muitas vezes, eram coletivas. Inicialmente, a professora questionou a turma sobre quantas incógnitas estariam presentes em uma equação dada como exemplo, sendo que as respostas obtidas estavam erradas, pois afirmavam haver duas incógnitas, sendo que havia apenas uma. Para confirmar o entendimento por parte da turma, a professora fez um novo questionamento, obtendo uma resposta correta dos alunos. Ao final do trecho, ela reformulou sua questão para se certificar de que os alunos haviam compreendido quais seriam as principais características de uma equação do 2º grau com uma incógnita, sendo que os alunos novamente responderam incorretamente. Salientamos, por esse trecho, que uma resposta correta não significa necessariamente compreensão dos alunos.

Ao verificarmos a respectiva transcrição dos sinais da ILS, essa parte do diálogo não aparece. Caso os alunos surdos tivessem as mesmas dúvidas, eles não puderam se apoiar no diálogo para corrigir eventuais erros conceituais. Seguem outros excertos para reforçar nossas afirmações:

> PROFESSORA: O b sempre o número que está com o x, e o c sempre o número que está sozinho. Então por exemplo aqui nesse exemplo. [por quê o

> b é 3?] Porque é o que está aqui olha. É o número que está com o x.
> PROFESSORA: Incompleta, porque eu só tenho dois termos olha, 1,2 [é aí a gente vai ter que identificar isso na prova?] Também.
> PROFESSORA: Aliás, quem vai ser o termo b? [4....x elevado a 2] Eu tenho o termo b aqui? Eu não tenho o termo b, eu não tenho nenhum número com x. Sempre o b é o que está com o x. Eu não tenho nenhum número com x [0]. O b vai ser 0.

No trecho anterior, a professora questionava os alunos acerca de quais seriam os elementos "a", "b" e "c" que compunham uma equação do 2º grau, sendo que houve erro na resposta dada pelo aluno ouvinte. Na sequência, após novos esclarecimentos dados por ela, os alunos participantes corrigiram a resposta dada anteriormente. PROFESSORA: "Essa aqui uma equação completa. [professora, esse 1º termo tem que ter x?] Não, pode ser fora de ordem também. [mas o b tem que ter x] É o termo b tem que ter o x".

No último trecho, o diálogo se refere a uma equação que foi apresentada em uma ordem diferente da maioria das vezes com que os livros didáticos abordam o tema equações do 2º grau, ou seja, $ax^2 + bx + c = 0$. Com isso, a professora explicou como proceder para identificar quais seriam os elementos "a", "b" e "c". Ao compararmos com a transcrição dos sinais da ILS, notamos que a explicação da docente foi interpretada, porém, o questionamento do aluno ouvinte não foi transmitido pela ILS. O mesmo ocorreu em outra situação, conforme ilustrado pelo trecho a seguir, no qual a professora respondia às dúvidas referentes ao tema potenciação. PROFESSORA: "[professora, porque que no – 2 o 4 não é negativo?] Porque o expoente é par, aqui você faz o jogo de sinal. Você não tem que multiplicar duas vezes aqui a base? Então menos com menos? Mais! Por isso que dá positivo".

Se, na unidade de análise anterior, percebemos que os alunos surdos, na maioria das vezes, não transmitem suas dúvidas, questionamentos, na presente unidade de análise novamente os alunos surdos não têm ao menos a oportunidade de compartilhar das dúvidas dos colegas ouvintes, bem como dos esclarecimentos da professora. Além disso, a professora também não obteve informações acerca de como estaria ocorrendo a aprendizagem dos alunos surdos, uma vez que as ações em que ela se dirige para a classe com esse objetivo, como, por exemplo, formular e reformular questões conceituais específicas, não foram interpretadas pela ILS.

f) Incoerências na interpretação de atividades matemáticas

Destacamos na presente unidade de análise os momentos em que notamos incoerências na interpretação de atividades matemáticas, que apresentavam erros com relação ao que estava sendo exposto tanto na lousa quanto na fala da professora, conforme ilustrado a seguir:

> PROFESSORA: Equações do 2º grau vão ser equações que vão ter o expoente 2.
> PROFESSORA: Esses são os termos, esse a, b e c são chamados de coeficientes.
> ILS: Ok, vamos começar agora um tema novo nome Equações de 2º grau. Tem letras junto com números.

Conforme o exposto nesse excerto, alguns termos não foram observados durante a transcrição dos sinais da ILS, mesmo em se tratando de termos usados várias vezes. Um exemplo foi para o termo “expoente”, utilizado pela professora já numa definição informal e que, na interpretação da ILS, deu-se da maneira verificada no trecho transcrito anteriormente**.** Outro exemplo, também importante para a análise da formação de uma equação do 2º grau e que não foi interpretado para os surdos, são os “coeficientes” (a, b e c). A ILS mencionava essas letras, sem relacioná-las à classificação matemática de coeficientes.

Ainda com relação aos trechos anteriores, a ILS dá a entender que todas as expressões que apresentam letras e números podem ser definidas como equações do 2º grau. Para o aluno, tal afirmação pode gerar dúvidas, já que, no 9º ano do Ensino Fundamental, ele já teve acesso a outros tipos de expressões que também apresentam essa característica, como as equações do 1º grau, as expressões algébricas etc. Na sequência dessa aula, a ILS interpreta uma definição dada pela professora para o que seria uma incógnita, fazendo-o de maneira bem mais simplificada, conforme seguem os dois trechos transcritos. ILS: “Nome icógnita (conforme digitalizado pela ILS), usa pra mostrar a letra, letra tem o nome icógnita” (sic). PROFESSORA: “Significa o quê? Que vai ter uma letra que eu ainda não sei o valor, por isso que é uma incógnita. Pode ser x, y ou z”.

Na sequência da aula, passam a surgir dúvidas dos alunos ouvintes, mesmo estes tendo tido acesso a todas as informações dadas pela professora, as quais vão sendo discutidas, porém, como vimos na unidade de análise anterior, os surdos não participam dos questionamentos, que, podemos inferir, seriam maiores, uma vez que houve incoerências na transmissão das informações dadas pela professora.

> ILS: Exemplo: se não tem o 0, por exemplo, o 0, o 7, o x, 0, 7, x, 0 não tem, precisa mudar a ordem, lugar, colocar no lugar certo, colocar o 0 no lugar certo. No caderno. Como? Como que você vai fazer? Sempre você tem 3 elementos, 3, você pode ter um quarto elemento, por exemplo, o 5, e você tem que somar, por exemplo, número 25, por exemplo.
>
> PROFESSORA: [por quê todas elas terminam em 0?] Porque o valor depois quando nós começarmos a resolver, descobrir o valor do x, esse valor que

> nós vamos colocar aqui no x nós vamos resolver e tem que ficar igual a 0.

Nos dois trechos anteriores, inferimos que os esclarecimentos não foram suficientes, quando da explicação da necessidade de se agrupar (somar) termos semelhantes em uma equação dada. A explicação interpretada pela ILS não deu conta de explicar o motivo de se igualar uma equação do 2º grau a 0 (zero). No caso da professora, ela menciona a necessidade futura de que se igualem as equações a 0 (zero) para permitir que as mesmas sejam resolvidas em outro momento na sequência das aulas.

No trecho a seguir, a ILS confunde os coeficientes formadores de uma equação do 2º grau, quando afirma que tanto "b" quanto "c" representam o segundo coeficiente. ILS: "b o segundo, a, o segundo b, e o segundo elemento é c".

Ainda na mesma aula, a ILS confunde-se novamente em sua interpretação da sequência dos coeficientes. Além disso, comete um equívoco ao interpretar o coeficiente "b", trocando o – 2 por – 1:

> PROFESSORA: Então aqui: $4x^2 - 2x = 0$. Essa é uma equação completa ou incompleta? [incompleta] Incompleta, porque eu só tenho dois termos olha, 1,2 [é aí a gente vai ter que identificar isso na prova?] Também. Quem que é o termo **a** nessa equação? [o 4] O 4, porque o 4 que está com o x^2. Quem é o termo b? [o 2] Só o 2? Olha o sinalzinho de menos. Sempre quando tiver menos junto do número o menos vai junto com o número, então -2. Quem é o c? [o 0] Só que não é esse 0. O c eu não tenho, não tenho nenhum número antes do igual sem letra.
> ILS: Exemplo: $4x^2 - x = 0$, , tá faltando o quarto elemento, porque só tem 2, não tem o terceiro. Incompleta. Porque tem **a**, quem é a? É 4. Quem é o

> b? É 2, e o c? Não tenho o elemento c, está faltando, então é 0 o c, se não tem é 0. O a é 4, o b é 2 e o c que não tem é 0.

Erros do tipo tratado nos últimos trechos podem ter sido cometidos pela distância em que a ILS se encontra da lousa, ficando, consequentemente, impossibilitada de interagir com os números, setas, gráficos, enfim, todos os artifícios utilizados pela professora na exploração das atividades. Como a ILS não se aproximou da lousa em nenhuma das aulas observadas, notamos uma dificuldade em lidar com as explicações orais das atividades que estão representadas pelos "esquemas" feitos na lousa. A confecção de esquemas pela professora atende às características dos surdos, cujo pensamento se organiza a partir de experiências visuais. Entretanto, ao não explorar a apresentação das atividades nos esquemas realizados pela professora, o surdo fica privado de um importante recurso para favorecer a sua compreensão.

Ainda no que se refere a interpretações incorretas, no trecho a seguir a ILS dá a entender que apenas o coeficiente "c" será um "numeral", o que não é verdade, uma vez que tanto "a" e "b" assumem, na maioria das vezes, valores numéricos, enquanto "c" também pode assumir outros tipos de representações. Depois disso, a ILS diz que o coeficiente "a" será o termo "elevado ao quadrado" (em dois momentos diferentes), o que também está incorreto. ILS: "E o 'c' sempre vai ser o numeral. 'a' sempre elevado ao quadrado, 'b' só x, sempre, e o 'c' número, 'a', 'b' e 'c'". ILS: "'a' significa o que é elevado ao quadrado, o 'b' é letra e o 'c' é número".

Não podemos afirmar que todas essas incoerências de interpretação se converteram em erros nas resoluções feitas no caderno pelos alunos surdos, já que não enfocamos neste texto os materiais escritos dos alunos. Porém, ao voltarmos nossa atenção à unidade de análise anterior - Os questionamentos e esclarecimentos de dúvidas apenas entre os ouvintes -, somos levados a pensar que, mesmo com um caderno correto (reflexo de uma cópia fiel do que está na lousa), a interpretação em Libras, ainda assim, apresenta equívocos que podem ser fundamentais para o (des)entendimento dos conceitos matemáticos discutidos.

Considerações finais: implicações para o ensino de matemática

Considerando as unidades de análise selecionadas para discussão neste capítulo, identificamos um grande relacionamento de interdependência, ou seja, as características de cada unidade de análise aqui apresentadas interferem entre si diretamente. Nossa expectativa, ao cotejar a interpretação da ILS com a fala da professora, não foi a de que elas fossem idênticas. Buscamos, isso sim, analisar em que sentido essas diferenças, geradas pelo ato de interpretação, podem influenciar a aprendizagem do aluno surdo incluso. Mesmo porque, se com duas línguas orais o trabalho de tradução/interpretação já se vê impossibilitado de resultar em sentidos idênticos, as dificuldades para o intérprete de Libras se ampliam, visto que este profissional transita por duas línguas de modalidades diferentes (uma oral e outra visuoespacial).

A ausência e/ou o desconhecimento do ILS de sinais específicos para os termos, conceitos e procedimentos da matemática escolar, leva o ILS a recorrer à datilologia, mesclando, assim, as duas línguas, de modo que a sua mediação se caracteriza como uma ação interlínguas, um fator complicador da aprendizagem, uma vez que o surdo transita continuamente entre os dois léxicos, o da língua portuguesa e o da Libras.

Outro aspecto fundamental a ser destacado é que a inexistência de interações entre os alunos surdos e a professora, e entre os alunos surdos e os alunos ouvintes, não apenas prejudica a inclusão destes primeiros, mas, ousamos afirmar, inviabiliza-a. Isso porque tal situação contraria o pressuposto principal da inclusão, que é o de "todos aprenderem juntos", já que nem a aprendizagem se efetiva, tampouco podemos afirmar que todos estão "juntos".

Entretanto, isso não significa que não é possível pensarmos em uma educação matemática inclusiva, aqui entendida como a perspectiva em que todo e cada estudante é considerado um aluno com necessidades educacionais especiais, devendo, portanto, o ensino dessa disciplina estruturar-se para atender à suas possibilidades e dificuldades e "fazer desaparecer a palavra e o conceito deficiente" da escola" (FERNANDES, 2004). Algumas ações precisam ser efetivadas para que isso ocorra. Acreditamos que, como uma possibilidade de maior sucesso na inclusão de alunos surdos nas aulas de Matemática, tanto esses estudantes quanto o profissional intérprete de Libras devem ser realmente considerados em todos os momentos quando pensamos na organização de uma escola que se apresente como inclusiva. Professores e intérpretes devem travar um diálogo maior em momentos externos à sala de aula, como no planejamento das atividades. Os projetos políticos e pedagógicos dos estabelecimentos de ensino precisam considerar os aspectos que se apresentam como de fundamental importância no atendimento de alunos surdos, como uma diversificação de metodologias de ensino, com destaque para aquelas que privilegiem esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, ou seja, que não fiquem presas à dependência da compreensão de textos em enunciados matemáticos.

É papel do professor minimizar as barreiras existentes no tratamento dos conhecimentos matemáticos em sala de aula, buscando tanto o apoio de professores especialistas que atuam no Atendimento Educacional Especializado (Sala de Recursos Multifuncionais ou Centros de Atendimento Especializado da Surdez), o auxílio de tecnologias assistivas e, sobretudo, diversificar suas estratégias de ensino, pensando sempre na aprendizagem de todos os seus alunos, inclusive os surdos. Isso porque a preocupação com a diversificação nos procedimentos metodológicos de ensino acaba por atingir positivamente todos os estudantes, e não somente aqueles com necessidades educativas especiais, como os surdos.

Sobre o papel do intérprete, a linha que separa a sua atuação da do professor, nas condições atuais da inclusão educacional, torna-se muito tênue, mas poderia ser diferente. Tal observação se deve, entre outros fatores, pelo fato de que os intérpretes, normalmente, possuem conhecimento maior das questões características da cultura surda. Masutti e Santos (2008) consideram tais profissionais uma espécie de intermediadores, atuando em "zonas de contato" das diferentes culturas (a surda e a ouvinte). Além disso, eles permanecem fisicamente mais próximos e com dedicação exclusiva ao aluno surdo e não somente na disciplina de Matemática, mas em todas as outras, o que faz com que eles conheçam pessoalmente as principais dificuldades do estudante por eles atendido. Ainda assim, é do professor a responsabilidade de discutir erros, acertos, alternativas, quando pensamos nos conhecimentos discutidos em sala de aula, mas o professor poderia se apropriar de parte do conhecimento do ILS para sustentar sua prática docente, mediante um diálogo contínuo em que as dificuldades dos alunos surdos e alternativas para minimizá-las fosse o foco.

Uma escola que se propõe a ser inclusiva de fato, e não apenas no discurso e respeito à legislação vigente, deve manter-se em uma formação contínua no que tange à discussão acerca das especificidades de seus educandos, envolvendo todos os atores educacionais. Afinal de contas, a cada dia um novo educando, com diferenças marcantes em relação ao público já atendido pelo estabelecimento, pode surgir (o surgir, neste caso, apresenta-se tanto pela matrícula de novos estudantes quanto pela maior compreensão e aproximação de alunos que já estudam no estabelecimento de ensino, porém não têm suas especificidades consideradas no ensino e na aprendizagem).

Terminamos lembrando que o principal objetivo almejado por todos os alunos, os ditos inclusos ou não, em uma mesma sala de aula é de aprender com boa qualidade. Para além do convívio com ouvintes nas mesmas escolas - o que percebemos como algo positivo –, surdos precisam aprender com melhor qualidade, numa busca de inclusão em potencial, aquela que possibilite que tais sujeitos também sejam incluídos em outros ambientes.

Referências

CECHINEL, Lenita Ceccone. **Inclusão do aluno surdo no Ensino Superior**: um estudo do uso de Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS) como meio de acesso ao conhecimento científico. 2005. 66 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí-SC. 2005.

FÁVERO, Maria Helena; PIMENTA, Meireluce Leite. Pensamento e linguagem: a língua de sinais na resolução de problemas. **Psicologia**: reflexão e crítica, Porto Alegre, v. 19, 2006.

FERNANDES, Solange Hassan Ahmad Ali. **Uma análise Vygotskiana da apropriação do conceito de simetria por aprendizes sem acuidade visual.** 250f. (Dissertação). Mestrado em Educação Matemática. FAE, PUC/SP, 2004.

GURGEL, Taís Margutti do Amaral. **Práticas e formação de Tradutores Intérpretes de Língua Brasileira de Sinais no Ensino Superior.** 2010. 168 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Metodista de Piracicaba, Piracicaba. 2010.

LACERDA, Cristina Broglia Feitosa. **O processo dialógico entre aluno surdo e educador ouvinte**: examinando a construção de conhecimentos. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, 1996.

LACERDA, Cristina Broglia Feitosa. O intérprete de língua de sinais em sala de aula: experiência de atuação no ensino fundamental. **Contrapontos,** Itajaí, v. 5, n. 3, p. 353-367, 2005.

LACERDA, Cristina Broglia Feitosa. A inclusão escolar de alunos surdos: o que dizem alunos, professores e intérpretes sobre esta experiência. **Cadernos Cedes**, Campinas, v. 26, n. 69, p. 163-184, maio/ago. 2006.

LAUTENSCHLAGER, Etienne; RIBEIRO, Alessandro Jacques. Reflexões acerca do impacto do conhecimento matemático dos professores no ensino: a álgebra da Educação Básica. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v. 7, n. 3, 2014.

MASUTTI, Mara Lúcia; SANTOS, Silvana Aguiar dos. Intérpretes de Línguas de Sinais: uma política em construção. In: QUADROS, Ronice Müller de (org.). **Estudos Surdos III.** Petrópolis: Arara Azul, 2008, p. 148-167.

RODRIGUES, David. Educação Inclusiva: mais qualidade à diversidade. In: RODRIGUES, David; KREBS, Ruy; FREITAS, Soraia Napoleão (orgs.). **Educação Inclusiva e Necessidades Educacionais Especiais.** Santa Maria: Ed. UFSM, 2005, p. 45-64.

SALA, Nuria Rosich; ESPALLARGAS, José Maria Nuñes; CAMPO, José Enrique Fernandes. **Matemáticas y Deficiencia Sensorial.** Madrid: Editorial Síntesis, 1996.

SANTOS, Leandra Gonçalves dos. **Introdução do pensamento algébrico**: um olhar sobre professores e livros didáticos de Matemática. 177f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória. 2007.

TARTUCI, Dulcéria. Alunos surdos na escola inclusiva: ocorrências interativas e construção de conhecimentos. In: **Anped, 25ª reunião.** GT 15. Caxambú, 2002.

Capítulo 7

Números irracionais no ensino fundamental: conhecimentos de alunos e tarefas para as aulas de matemática

Veridiana Rezende
Clélia Maria Ignatius Nogueira

Introdução

Neste capítulo apresentamos sete tarefas matemáticas que podem ser desenvolvidas em sala de aula de matemática para introduzir e/ou auxiliar na compreensão do conceito de número irracional, a partir do oitavo ano do Ensino Fundamental. Essas tarefas constituíram o instrumento de pesquisa da tese de doutorado da primeira autora, sob orientação da segunda, e foram resolvidas por 21 alunos brasileiros que finalizavam o ensino fundamental, médio e superior de matemática, e 21 alunos franceses que finalizavam os níveis de ensino correspondentes, sujeitos colaboradores da pesquisa.

Diante de sistemas de ensino distintos, a pesquisa teve como objetivo geral analisar os conhecimentos relacionados aos números irracionais, mobilizados em tarefas matemáticas por alunos brasileiros e franceses, concluintes de cada nível de ensino investigado.

Sendo assim e considerando a importância de o professor de matemática inteirar-se de conhecimentos possíveis de serem manifestados por seus alunos, especialmente os não consolidados ou mesmo equivocados, e sobre os possíveis modos de seus alunos raciocinarem em relação aos números irracionais, para cada uma das tarefas apresentaremos conhecimentos manifestados por alunos brasileiros do ensino fundamental, e alunos franceses do nível correspondente, que foram sujeitos colaboradores de nossa pesquisa.

A pesquisa foi fundamentada na teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud (VERGNAUD, 1990, 2009), teoria de desenvolvimento cognitivo que adota o pressuposto de que o conhecimento se adapta e se desenvolve com o tempo e em função das situações que o sujeito vivencia. Ainda, com base em Vergnaud (1990), o estudo realizado refere-se ao campo conceitual dos números irracionais, considerando Campo Conceitual como um conjunto de situações, conceitos, representações simbólicas, propriedades e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas.

Esta teoria nos ofereceu suporte para elaborar as tarefas matemáticas, e também para compreender as respostas dos alunos, principalmente os conhecimentos implícitos possíveis de serem manifestados nas respostas dos alunos, propiciando implicações diretas para as aulas de matemática, conforme explicitaremos no decorrer deste capítulo.

Números irracionais nos currículos do ensino fundamental e do *collège*

Além de tarefas relacionadas aos números irracionais, apresentamos neste capítulo conhecimentos de alunos brasileiros que finalizavam o ensino fundamental e de alunos franceses que finalizavam o nível de ensino francês correspondente ao ensino fundamental, e discutiremos a forma como os números irracionais são contemplados nos currículos oficiais do Brasil e da França, no que se refere ao nível de ensino em questão.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN são documentos oficiais do sistema de ensino brasileiro que têm por objetivo orientar professores, instituições de Ensino Fundamental e Médio e autores de livros didáticos. Essas orientações referem-se aos conteúdos a serem ensinados, planejamento das aulas e sugestões metodológicas aos professores, currículos escolares, especificidades a serem consideradas aos alunos no decorrer de sua aprendizagem e os momentos (nível de ensino) em que os conteúdos devem ser abordados em sala de aula. Para o Ensino Fundamental, cada disciplina possui seu próprio PCN.

Segundo os PCN para a disciplina de matemática (BRASIL, 1998), o conteúdo números irracionais deve ser ensinado no quarto ciclo do Ensino Fundamental, que corresponde aos oitavo e nono anos deste nível de ensino. Neste ciclo, os conteúdos são apresentados em quatro blocos: números e operações, espaço e formas, grandezas e medidas, tratamento da informação.

No que concerne aos números e operações, os objetivos para o quarto ciclo do Ensino Fundamental, segundo os PCN, são

> - Ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais.
> - Resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.
> - Selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais (BRASIL, 1998, p. 81).

No que diz respeito aos conteúdos propostos para o quarto ciclo do Ensino Fundamental, os PCN (BRASIL, 1998) solicitam a ampliação dos significados dos números por meio do reconhecimento da existência dos números irracionais. Segundo estes documentos, é importante que o aluno vivencie situações em que os números racionais não são suficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os números irracionais. Recomenda-se que no ensino dos números irracionais não sejam enfatizados os cálculos com radicais, e que o aluno:

> identifique o número irracional como um número de infinitas casas decimais não periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contraexemplos para ampliar a compreensão dos números (BRASIL, 1998, p. 83).

Especificamente para o número irracional π, os PCN alertam os professores para algumas tarefas que envolvem medições de circunferências e diâmetros de objetos circulares para associar a razão entre essas duas medidas com o número π, pode se tornar um obstáculo para o aluno compreender a irracionalidade desse número. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), este fato pode induzir os alunos a compreenderem o número π como um número racional, pois os resultados das medidas obtidos com os objetos circulares são todas aproximações racionais e que dependem da espessura do barbante, do tamanho dos objetos circulares etc.

O sistema de ensino francês é norteado pelos *Programmes*, documento oficial que contém a Base Comum de Conhecimentos e

Competências[1] propostos pelo ministério de Educação da França. Esses documentos consistem dos conhecimentos essenciais e os métodos aos quais os alunos devem ser submetidos no decorrer de sua aprendizagem, e devem ser seguidos por todas as instituições de ensino, sejam elas públicas ou privadas, da escola maternal ao *Lycée*, assim como pelos autores de livros didáticos.

Desse modo, no que se refere aos documentos curriculares franceses, foram analisados os *Programmes* do *Collège* (FRANCE, 2008) para a disciplina de matemática, com o objetivo de perceber como o ensino francês propicia a aprendizagem dos números irracionais.

Nossa análise realizada em livros didáticos e nos *Programmes* nos revela que os números irracionais não são explicitados no currículo do *Collège*. No entanto, embora sem formalizar e sem mencionar a expressão números irracionais, nota-se que os alunos franceses têm os primeiros contatos com esses números na *Quatrième*, nível correspondente ao oitavo ano brasileiro, ao estudarem o teorema de Pitágoras. Pois, dependendo dos valores considerados para as medidas dos lados dos triângulos retângulos, acarreta em cálculos com números irracionais algébricos - números da forma $\sqrt{n}$, sendo n um número inteiro positivo que não é quadrado perfeito. Esse fato pode ser percebido nos livros didáticos franceses da *Quatrième.* Por exemplo, no livro deste nível escolar da Coleção *Repère* (BRAULT et al., 2007), no bloco de geometria, uma das seções refere-se ao teorema de Pitágoras e sua recíproca, na qual são realizados cálculos de raízes quadradas que resultam em valores irracionais, porém os cálculos são efetuados aproximadamente com o auxílio da calculadora e nenhuma explicação sobre tal aproximação é abordada nesta seção.

Nos *Programmes* da *Troisième* (FRANCE, 2011), ano escolar correspondente ao nono ano brasileiro, também são percebidos indicativos do conceito de números irracionais no campo Números e

[1] A lei que determina a existência e exclusividade da Base Comum de Conhecimentos e Competências entrou em vigor em 2006 com o objetivo de contemplar valores, saberes, línguas e práticas a todos os alunos que participam da escolaridade obrigatória, proporcionando-lhes construir seu futuro profissional e pessoal, e obter com sucesso sua vida na sociedade.

Cálculos e no campo Geometria. No campo números e cálculos é solicitado que os alunos conheçam:

- Números inteiros e racionais (divisor comum entre dois inteiros; frações irredutíveis; operações sobre os números relativos em escrita fracionária);
- Cálculos elementares sobre os radicais (raiz quadrada de um número positivo; produto e quociente de dois radicais).

As competências para este campo devem ser:

- Saber que, se a designa um número positivo, $\sqrt{a}$ é o número positivo cujo quadrado é a e utilizar as igualdades: $(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt{a^2} = a$;
- Determinar, por meio de exemplos numéricos, os números x tal que $x^2 = a$, sendo a um número positivo.

E, de acordo com o campo geometria, os alunos devem estudar sobre:

- Propriedades geométricas elementares de figuras planas e de sólidos: quadrado, retângulo, losango, paralelogramo, triângulo, círculo, cubo, paralelepípedo retângulo, cilindro, esfera.

Desse modo, nota-se que, embora os números irracionais não estejam explicitamente inseridos nos *Programmes* do *Collège,* conhecimentos sobre os números irracionais algébricos e do número transcendente π fazem parte da trajetória escolar dos alunos do *Collège*.

A afirmação acima decorre do estudo do teorema de Pitágoras, de raízes quadradas e suas operações, soluções de equações do segundo grau $x^2 = a$, sendo a um número positivo, cálculos de áreas de figuras planas como o quadrado, relações trigonométricas no triângulo retângulo. Nos momentos de ensino e aprendizagem dos conceitos mencionados acima não se pode negar a presença dos números irracionais algébricos.

Em relação ao número transcendente π, nota-se que ele está diretamente relacionado aos cálculos de área e perímetro do círculo, área e volume de sólidos redondos como o cilindro e a esfera.

Assim, considerando os documentos curriculares de matemática do Brasil e da França, nota-se que os alunos vivenciam situações relacionadas ao conceito de números irracionais no decorrer do processo escolar, mesmo que na França a expressão e a definição de números irracionais não esteja presente nos documentos e livros didáticos.

Desse modo, apresentamos neste texto sete tarefas matemáticas elaboradas com a intenção de auxiliar na compreensão do conceito de número irracional, seguidas de análises das respostas dos alunos brasileiros, sujeitos de nossa pesquisa, que finalizavam o ensino fundamental, e de alunos franceses de nível de ensino correspondente. Em nossas análises, procuramos identificar semelhanças e diferenças nas respostas desses alunos, apesar de estarem inseridos em sistemas de ensino e, sobretudo, culturas diferentes.

Alguns critérios para a pesquisa: seleção dos alunos, elaboração das tarefas e coleta de informações

Os alunos brasileiros de Ensino Fundamental e os alunos franceses do *Collège* foram selecionados por membros das equipes pedagógicas ou professores de matemática das instituições envolvidas com a pesquisa. Foi solicitado que os alunos fossem voluntários e de nível mediano em matemática, não sendo os alunos que mais se destacavam nem aqueles com desempenho menos favorecido perante os colegas da turma.

Participaram como sujeitos da pesquisa sete alunos do Ensino Fundamental de quatro colégios públicos do interior do Paraná, entre os meses de setembro e outubro de 2011. Na França, as entrevistas foram realizadas com sete alunos de dois *Collèges* públicos da região Nord-Pas-de-Calais, entre os meses de março e abril de 2012.

Para preservar a identidade dos alunos, denominaremos por F1, F2, F3, F4, F5, F6 e F7 os alunos brasileiros do Ensino Fundamental e por C1, C2, C3, C4, C5, C6 e C7 os alunos franceses do *Collège*.

Para a elaboração das tarefas consideramos, a partir de nossos estudos, diversos conceitos, símbolos, teoremas, propriedades e situações presentes no campo conceitual dos números irracionais. A partir disso, elencamos sete ideias-base necessárias para a construção do conceito de números irracionais no nível do Ensino Fundamental:

> I. Compreender sobre as infinitas casas decimais de alguns números.
> II. Compreender que alguns números podem ser representados como a razão entre dois números inteiros e outros números não podem.
> III. Diferenciar um número irracional de um número racional: saber que um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros, e que um número irracional possui infinitas casas decimais não periódicas.
> IV. Considerar a existência de números irracionais e perceber para quê esses números servem.
> V. Saber aplicar o teorema de Pitágoras.
> VI. Aceitar a existência de segmentos de medidas $\sqrt{n}, \forall n \in N$,
> VII. Aceitar que a equação $x^2 = p$, tem solução real, para todo $p \in R_+$ (REZENDE, 2013, p. 102-103).

Cada tarefa matemática do instrumento de pesquisa está associada a, pelo menos, uma dessas ideias-base. Além disso, essas ideias foram elaboradas de modo que a cada tarefa o grau de complexidade aumenta, no sentido de ampliar conceitos, representações simbólicas e propriedades envolvidas.

Ademais, baseadas em Vergnaud (1990), consideramos que para a compreensão de um conceito o sujeito deve vivenciar uma diversidade de situações relacionadas a este conceito, as quais envolvem diversos símbolos, diferentes representações, teoremas, propriedades presentes no campo conceitual dos números irracionais.

O objetivo desta pesquisa é analisar os conhecimentos manifestados pelos alunos ao resolver as tarefas elaboradas, relacionadas aos números irracionais. Sendo assim, optamos por realizar entrevistas individuais, que foram filmadas, contendo nove tarefas para resolver. Para este texto, optamos por apresentar sete tarefas desenvolvidas com os alunos, sendo aquelas mais significativas dentre as nove propostas em nossa pesquisa, e por considerarmos que não influenciaria na apresentação dos resultados. Para as respostas de cada tarefa foram solicitadas justificativas, permitindo que os sujeitos demonstrassem seu nível de compreensão. Procuraram-se meios de esclarecer as ambiguidades surgidas nas respostas.

Para as análises, cada resposta foi analisada individualmente com base em observações das ações dos alunos ao resolverem as tarefas propostas, levando em consideração os sucessos, hesitações, fracassos, com atenção especial aos conhecimentos implícitos errôneos, possivelmente mobilizados nas respostas dos alunos durante as entrevistas.

Tarefas matemáticas e conhecimentos de alunos relacionados aos números irracionais[2]

As sete tarefas relacionadas aos números irracionais a seguir podem ser desenvolvidas em sala de aula a partir do oitavo ano do Ensino Fundamental. Para cada uma das tarefas apresentamos seus

[2] Foi disponibilizada aos alunos calculadora científica, régua, compasso, lápis, caneta, borracha e folhas para rascunho.

objetivos, exemplos e análises de respostas dos alunos colaboradores da pesquisa.

Tarefa 1

a) Tecle o número 2 na calculadora seguido da tecla $\sqrt{\ }$. Qual o número que aparece no visor da calculadora?

b) Podemos afirmar que $\sqrt{2}$ é igual ao número que apareceu no visor da calculadora, ou seja, que a igualdade $\sqrt{2}=1{,}414213562$ é verdadeira?

Bloco I de questões

(Somente para os alunos que afirmaram que a igualdade $\sqrt{2}=1{,}414213562$ é verdadeira)

c) Quanto é $\sqrt{2}$ elevado ao quadrado?

d) Quanto é $1{,}414213562$ elevado ao quadrado?

e) Compare os valores encontrados no item (c) e no item (d). Por que você pensa que os resultados foram diferentes?

Bloco II de questões

(Somente para os alunos que afirmaram que a igualdade $\sqrt{2}=1{,}414213562$ é falsa)

f) Por que você acha que a igualdade não é verdadeira?

g) Você entende que há mais alguns ou há muitos números além destes que aparecem no visor da calculadora?

h) Como são estes números? Você entende que eles apresentam um período ou não apresentam um período?

A tarefa[3] 1 teve por objetivo investigar se os alunos mobilizam corretamente o fato de que os números disponíveis no visor da calculadora são números decimais, e, por este motivo, ao teclar um número irracional na calculadora como, por exemplo $\sqrt{2}$, o resultado

[3] Por considerar que não influenciaria a apresentação dos resultados, para este texto serão apresentadas as análises das tarefas 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9. Porém, elas foram renumeradas de 1 a 7 para dar coerência ao texto.

não passa de uma aproximação desse número.

Embora o número $\sqrt{2}$ seja utilizado com certa frequência nas aulas de matemática e livros didáticos, os alunos investigados, brasileiros e franceses, não ofereceram indicativos de compreenderem a natureza desse número. Esta afirmação é baseada no fato de que nenhum aluno brasileiro ou francês respondeu que a igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ é falsa.

Percebe-se que além de os alunos não reconhecerem a natureza do número $\sqrt{2}$, eles não reconheceram espontaneamente as operações de potenciação e radiciação como operações inversas, pois os alunos entrevistados não tiveram iniciativa própria de calcular ambos os lados da igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ ao quadrado, para concluir que os números $\sqrt{2}$ e 1,414213562 são números distintos.

Após o bloco I de questões, momento em que a pesquisadora dialogou com os alunos e os incentivou a calcularem ambos os lados a igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ ao quadrado, e também a refletirem sobre os resultados distintos, predominou-se nas respostas dos alunos o fato de eles suspeitarem que $\sqrt{2}$ possui mais casas decimais além daquelas que aparecem no visor da calculadora. Este fato é exemplificado com a fala do aluno francês C4: "Sim, eles são iguais porque a gente tecla na calculadora e este é o resultado. [...] Elevando ao quadrado os resultados são diferentes, mas é bem próximo de dois... acho que tem mais alguns dígitos".Neste caso, depois de induzido pela pesquisadora a elevar ambos os lados da igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ ao quadrado, o aluno apresentou indicativos em perceber a limitação de casas decimais disponíveis na calculadora.

Tarefa 2

a)Existem dois números inteiros p e q, $q \neq 0$ com os quais podemos escrever 3 igual a $\frac{p}{q}$? Se for possível diga quais são os números p e q. Caso contrário, justifique sua resposta.

b) Existem dois números inteiros p e q, $0 \neq q$ com os quais podemos escrever $\sqrt{2}$ igual a ? $\frac{p}{q}$ Se for possível diga quais são os números p e q. Caso contrário, justifique sua resposta.

A tarefa 2 teve por objetivo identificar os conhecimentos relacionados ao fato de que um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros. Nessa tarefa, três alunos brasileiros e quatro alunos franceses responderam equivocadamente que um número não inteiro não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros, conforme a fala do aluno F2: "Eu acho que não [que não é possível representar $\sqrt{2}$ como a razão entre dois números inteiros]. Porque a gente fez raiz de dois na calculadora e deu um número com vírgula".

Cinco alunos responderam que devem existir dois números inteiros p e q, $q \neq 0$ tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. As respostas destes alunos indicam que para eles, dentre os infinitos números inteiros p e q, $q \neq 0$, devem existir algum par de números que satisfaz a igualdade . Esse fato é exemplificado com a resposta do aluno F3 que, após diversas tentativas de cálculos com o uso da calculadora, respondeu: "O que deu mais aproximado foi 15 dividido por 13... que deu 1,1538". Falas como esta também indicam a associação de um número irracional como um número decimal, com finitas casas decimais.

Tarefa 3

As seguintes equações do segundo grau possuem solução no conjunto dos números reais?

a) $x^2 = 16$ b) $x^2 = 17$

c) $x^2 = -9$ d) $x^2 = \pi$

Com a tarefa 3 pretendeu-se investigar se os alunos consideram, ou não, a existência de solução para as equações da forma $x^2 = a$, com $a \in$ R , sobretudo quando a não é um número quadrado perfeito, resultando numa solução irracional algébrica.

Nessa tarefa destacamos o fato de que nenhum aluno brasileiro ou francês mencionou as soluções negativas das três equações do segundo grau, propostas nos itens a, b e d. Entretanto, ressalta-se que em relação à equação do item c: $x^2 = -9$, as soluções de seis alunos, sendo três alunos do Ensino Fundamental e três alunos do *Collège*, apresentaram dois valores, sendo um valor positivo e o outro envolvendo o sinal negativo, tais como: 3 e -3; $\sqrt{9}$ e $\sqrt{-9}$; $\sqrt{3}$ e $\sqrt{-3}$. Apesar de as respostas manifestadas pelos alunos não serem corretas, faz-se hipótese de que o valor negativo -9, presente na equação $x^2 = -9$, contribua para os alunos se recordarem da existência de ambas as soluções – positiva e negativa –, provavelmente já estudadas em sala de aula por estes alunos, uma vez que os conceitos de raiz quadrada, potência e equações do segundo grau fazem parte do currículo brasileiro e francês para esse nível de ensino.

Quatro alunos do Ensino Fundamental e cinco alunos do *Collège* alegaram que as equações $x^2 = 17$ e $x^2 = \pi$ não possuem soluções, conforme justifica o aluno francês C2: "Não tem solução... porque não tem 17 na tábua de multiplicação". Ao que se refere a apresentar solução decimal com o auxílio da calculadora para as equações propostas, apenas um aluno brasileiro deste nível de ensino o fez, dizendo que a solução de $x^2 = 17$ é $x = 4{,}123105626$. As respostas desses alunos indicam que, quando se trata de resolução de equações do segundo grau que envolve raiz quadrada de números positivos ou número irracional transcendente como o número π[4], o domínio numérico deles está associado a números quadrados perfeitos ou a números decimais.

[4] Um número irracional é denominado de transcendente quando não existe uma equação algébrica que tenha este número como solução.

Tarefa 4

i) Existe um quadrado cuja medida de área é $A = 25cm^2$?

ii) Existe um quadrado cuja medida de área é $A = 13cm^2$?

O objetivo desta tarefa é proporcionar reflexões sobre a existência de quadrados com medida do lado igual a um número irracional algébrico. A opção pelo quadrado foi feita porque quando a medida dos lados é um número natural, trata-se de uma figura geométrica conhecida pelos alunos antes mesmo de seus primeiros anos escolares.

Iniciamos a tarefa questionando sobre a existência do quadrado de área $A = 25cm^2$. Todos os 14 alunos entrevistados disseram que o referido quadrado existe, e que a medida do lado é de 5cm.

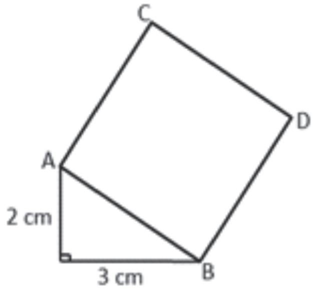
No que se refere ao quadrado de medida de área $A = 13cm^2$, as respostas de 11 alunos, sendo seis do Ensino Fundamental e cinco do *Collège,* dizem respeito a não existência de um quadrado de área $13cm^2$ porque não existe um número que multiplicado por ele mesmo resulte em 13, conforme ilustra a fala do aluno francês C4: “Não... porque não existe 13 na tábua de multiplicação... nós não podemos encontrar um número que vezes ele mesmo resulte em 13”. Dentre os alunos entrevistados, apenas o aluno brasileiro F4 respondeu corretamente, dizendo que existe o referido quadrado, e que o lado mede $\sqrt{13}cm$.

Conforme esperávamos, com exceção de um aluno, os demais entrevistados não reconheciam a existência de um quadrado de medida de lado irracional algébrico. Desse modo, elaboramos a tarefa 5 que teve como propósito levar os alunos a refletirem sobre seus próprios erros e sobre suas justificativas para a não existência do quadrado de medida de área 13cm².

Sendo assim, apresentamos aos alunos uma figura geométrica composta por um triângulo retângulo, com catetos de medida $2cm$ e $3cm$, de modo que sua hipotenusa coincidia com o lado do quadrado ABCD, conforme segue:

Tarefa 5

A área do quadrado ABCD é 13cm^2. Você concorda com esta afirmação?



Ao elaboramos esta tarefa, tivemos a intenção que para os alunos a resolverem primeiramente eles precisam calcular a área do quadrado ABCD. Para isso, conduzimos, quando necessário, as discussões que favoreceram os alunos perceberem que a medida da hipotenusa do triângulo retângulo representado na figura coincide com a medida do lado do quadrado ABCD.

Assim, considerando l a medida da hipotenusa do triângulo retângulo, notamos que ao calcular a medida da hipotenusa utilizando o teorema de Pitágoras, os alunos realizaram os seguintes cálculos: $l^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow l = \sqrt{13}$. Este momento permitiu aos alunos refletirem sobre o número $\sqrt{13}$, resultante de seus cálculos, hesitarem, associarem com a situação anterior que eles haviam respondido. Segundo Vergnaud (1990), esses momentos de reflexões, desequilíbrios, hesitações e principalmente de reconhecimento de seus próprios erros favorecem aprendizagens.

Dentre os 12 alunos que responderam esta tarefa, apenas dois alunos franceses indicaram possibilidade de desestabilizar conhecimentos equivocados mobilizados nas tarefas 3 e 4, concluindo pela existência do quadrado de medida de área 13cm^2, argumentando que o lado do quadrado ABCD é $\sqrt{13}cm$.

No que diz respeito aos seis alunos brasileiros e aos quatro alunos franceses, não foi possível desestabilizar os conhecimentos falsos, manifestados nas tarefas anteriores. Contudo, ao contrário da tarefa 4, onde as respostas desses alunos referiam-se a não existência do quadrado de área 13*cm²*, nesta tarefa, ao utilizarem o teorema de Pitágoras para encontrar a medida $\sqrt{13}$ da hipotenusa do triângulo retângulo, os alunos teclavam $\sqrt{13}$ na calculadora e concluíam pela existência de um quadrado de área aproximadamente igual a.

O fato de nesta tarefa os alunos alegarem sobre a existência de um quadrado de medida de área aproximadamente igual a 13cm², indica suas dificuldades em considerar o número raiz de 13 em suas diferentes representações, sobretudo na forma de radical $\sqrt{13}$. Pois, apesar de encontrarem por meio do teorema de Pitágoras o número $\sqrt{13}$ como solução para a pergunta no enunciado da tarefa, os alunos faziam a conversão para sua representação decimal, conduzindo-os a concluírem sobre a existência de um quadrado de área aproximadamente 13*cm²*. Isto mostra, conforme Assude (1989), a crença de que a calculadora jamais oferece um valor incorreto. Notamos que esta crença é tão resistente para os alunos que os levam a negar a existência de uma figura geométrica plana, estudada desde os anos iniciais de escolarização, como o quadrado.

Tarefa 6

Você acha que é possível representar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica?

A tarefa 6 teve por objetivo analisar os conhecimentos dos alunos relacionados a representar um número irracional algébrico, tal como $\sqrt{2}$, na reta numérica. Para isso, foi solicitado aos alunos representarem o número $\sqrt{2}$ na reta numérica. A tarefa foi elaborada incluindo malha quadriculada com intenção de que os alunos representassem o segmento de medida $\sqrt{2}\ u.c$ na reta numérica com o auxílio da construção de um triângulo retângulo de catetos unitários, transportando a medida da hipotenusa $\sqrt{2}\,u.c$ para a reta numérica.

No que diz respeito aos alunos entrevistados, três alunos do Ensino Fundamental e quatro alunos do *Collège* responderam que não é possível representar $\sqrt{2}$ na reta numérica, como mostra a fala de F7: "Não. [...] Porque é um número grande demais". E, os demais entrevistados responderam que é possível representar aproximadamente um número decimal na reta numérica.

Observa-se que, referente à tarefa 4, o aluno brasileiro F4 foi ágil e preciso em sua resposta, dizendo que o lado do quadrado media $\sqrt{13}cm$. Entretanto, na presente tarefa este mesmo aluno alegou ser possível representar apenas um valor aproximado de $\sqrt{2}$ na reta, segundo mostra a fala de F2: "Não, é possível representar apenas um valor aproximado 1,4". Este fato sinaliza a importância de se diversificar as situações durante o processo de ensino e aprendizagem.

Assim, em nossa sequência de tarefas, propomos aos alunos a construção da figura que é conhecida como Caracol Pitagórico.

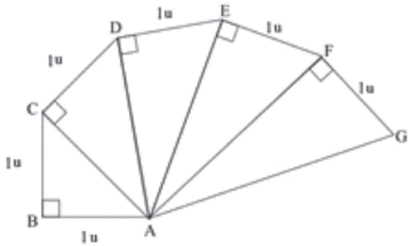
Tarefa 7

a) Considere um triângulo retângulo ABC de catetos unitários. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo?

b) Considere o triângulo retângulo ACD, cujo um dos catetos tem a mesma medida da hipotenusa do triângulo precedente e o outro cateto é unitário. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo?

c) Considere o triângulo retângulo ADE, cujo um dos catetos tem a mesma medida da hipotenusa do triângulo ACD e o outro cateto é unitário. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo?

d) Agora que você conheceu um método de construção de segmentos de medidas $\sqrt{n}$, $n \in Z_+^*$ você representaria na reta o número $\sqrt{2}$ de um modo diferente que você representou na tarefa anterior?



Esta tarefa favoreceu o desempenho dos alunos em relação às respostas dadas nas tarefas anteriores. Pois, ao conhecerem a construção de segmentos de medida irracional algébrica por meio do caracol pitagórico, embora nem todos os alunos soubessem ainda representar corretamente $\sqrt{2}$ na reta numérica, eles passaram a considerar a possibilidade da representação dessas medidas, conforme o fragmento da entrevista de F1: "Agora eu acho que sim! Deixando na raiz. [...] Só que é difícil eu fazer esta dedução porque eu não aprendi isto ainda". A resposta deste aluno demonstra que ele está diante de uma situação nova, que o fez refletir sobre a existência de segmentos de medida irracional algébrica, proporcionando-lhe aprendizagens.

Considerações finais: implicações para o ensino de matemática

Neste capítulo foram apresentadas duas principais implicações para o ensino dos números irracionais: i) sete tarefas relacionadas aos números irracionais, elaboradas considerando o campo conceitual dos números irracionais e a possível desestabilização de conhecimentos falsos factível de serem manifestados pelos alunos; ii) conhecimentos de alunos manifestados durante a resolução destas tarefas.

Em relação às tarefas, sugerimos que elas sejam implementadas em sala de aula, seja para introduzir o conceito de número irracional aos alunos de oitavo e/ou nono ano do Ensino Fundamental, para aprimorar o conhecimento de alunos do Ensino Médio em relação a estes números, ou em cursos de formação para professores de matemática, inicial ou continuada. As tarefas propostas foram elaboradas com a intenção de desestabilizar, pelo menos localmente, conhecimentos falsos mobilizados pelos alunos, propiciando a reflexão e o reconhecimento de seus próprios erros, proporcionando-lhes momentos de aprendizagens.

Para a implementação das tarefas, sugerimos que as ações dos professores em sala de aula sejam norteadas pelas quatro fases das situações didáticas propostas por Brousseau (2008), denominadas por situação de ação, situação de formulação, situação de validação e institucionalização. Assim, recomendamos que o professor organize os alunos em duplas ou em grupos para que eles resolvam cada uma das tarefas, reflitam, hesitem e criem suas próprias estratégias de resolução (situação de ação). Na sequência, é importante que os alunos troquem informações com os colegas, explicitem suas estratégias em linguagem oral e/ou escrita (situação de formulação); testem seus modelos de resoluções, debatam e validem seus modelos com os colegas (situação de validação).

Nestas três fases de implementação das tarefas é importante que o professor seja o mediador da situação em sala de aula, e que ele devolva as perguntas dos alunos com outros questionamentos, de modo a levá-los a refletir sobre suas estratégias e possíveis erros. Neste momento de aprendizagem, o professor deve evitar encaminhamentos que conduzam os alunos a encontrarem respostas imediatas para as tarefas. Após as três fases de implementação, sugerimos que o professor assuma a quarta fase proposta por Brousseau, denominada por institucionalização. Este é o momento de o professor explicitar o conteúdo abordado, no caso os números irracionais, e resolver cada uma das tarefas na lousa considerando a participação dos alunos, formalizando o conteúdo.

No que se refere aos conhecimentos dos alunos relacionados aos números irracionais, mostramos neste texto conhecimentos, com atenção especial aos conhecimentos falsos, que alunos manifestam ao finalizarem o Ensino Fundamental. Consideramos que compreender o modo de os alunos raciocinarem, conhecer suas dificuldades e erros a respeito dos números irracionais pode auxiliar os professores a prepararem e a conduzirem suas aulas, propiciando aprendizagens mais efetivas a seus alunos.

Além disso, nossas análises mostram que os alunos do Ensino Fundamental e *Collège* mobilizam conhecimentos de números irracionais correspondentes, não sendo possível apontar diferenças significativas entre suas respostas, nem perceber avanços em seus desempenhos, apesar de terem sido analisados sujeitos de sistemas de ensino culturalmente distintos, e dos currículos explicitarem ou não estes números. De acordo com os resultados obtidos, esses alunos não compreendem seis dentre as sete ideias-base apresentadas neste capítulo, relacionadas aos números irracionais. Apenas a ideia-base referente ao teorema de Pitágoras foi mobilizada corretamente pelos alunos. Este fato nos permite inferir que o modo como os números irracionais vêm sendo estudado pouco tem propiciado a aprendizagem dos alunos.

Assim, para a sala de aula, sugere-se que as tarefas sejam escolhidas conforme as contempladas nesta pesquisa, com vistas a desestabilizar conhecimentos falsos possíveis de serem manifestados nas respostas dos alunos, e que as tarefas diversifiquem as representações, propriedades, símbolos e teoremas. Especificamente em relação aos números irracionais, ressalta-se a importância de se explorar em sala de aula situações relacionadas ao teorema de Pitágoras, trigonometria, resolução de equações polinomiais, áreas de figuras planas, volumes de sólidos geométricos, construções geométricas com medidas irracionais, entre outras, para que com o decorrer do período escolar o conceito de número irracional possa ser apropriado pelos alunos.

Referências

ASSUDE, Teresa. Racines carées: conceptions et mises en situations d'élèves de quatriéme et troisiéme. **Petit X**, n. 20, p. 5-33, 1989.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, 1998.

BRAULT, Roger; et. al. **Repère. Mathématiques**. 4e. Editora Hachette Éducation, Paris, 2007.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

FRANCE. Bulletin Officielspécial (B. O.) n. 6 du 28 du août 2008. Programmes du Collège. **Programmes de l'enseignement de Mathématiques.** Disponível em: http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf. Acesso em: nov. 2011.

REZENDE, Veridiana. **Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses**: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino. (Tese de doutorado). Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, PCM, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Albert (orgs.). **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: CRV, 2009.

_____. La théorie des champs conceptuels. Recherche en Didactique des Mathématiques. **Grenoble:** La Pensée Sauvage, v. 10, n. 2.3, p. 133-170, 1990.

Capítulo 8

A influência dos registros figurais nos tratamentos e mobilizações de registros em problemas de geometria

Mariana Moran
Valdeni Soliani Franco

Introdução[1]

Neste capítulo, apresentaremos aspectos que se referem à influência do tipo de registro no tratamento figural e na mobilização de outros registros de representação durante a resolução de um problema de geometria, encontrado em Duval (1999), e que foi implementado em uma pesquisa de doutorado.

A figura que compõe o problema a ser resolvido neste capítulo foi representada por meio dos seguintes registros figurais: Material Manipulável (MM), o *Software* GeoGebra (SG) e a Expressão Gráfica (EG). O problema durante a investigação contempla principalmente os seguintes conteúdos de geometria plana do Ensino Fundamental e Médio: segmentos de reta, polígonos e suas áreas, e congruência de triângulos.

[1] Esta pesquisa recebeu o apoio financeiro da Fundação Araucária no período de janeiro/2015 a junho/2015, por meio de bolsa oferecida pelo Programa de Apoio à Capacitação Docente das Instituições Públicas de Ensino Superior do Paraná – Doutorado (Acordo Capes/FA).

Uma figura pode ser representada de várias maneiras e cada uma delas corresponde ao seu registro figural, por exemplo, por meio de Material Manipulável, de uma construção figural em um *Software* de geometria oude construções utilizando Expressão Gráfica. Duval (2011, p. 72) explica que "Os registros são sistemas cognitivamente produtores, ou mesmo "criadores", de representações sempre novas".

Isso nos levou a realizar uma investigação sobre as influências dos tipos de registros figurais durante a exploração de alguns conceitos de geometria em um contexto de resolução de problema, no que diz respeito às transformações – operações e mobilizações de registros – que podem e devem ser realizadas para que o sujeito obtenha sucesso na aprendizagem e, consequentemente, na conclusão do problema. Além disso, apresentaremos algumas possibilidades de representações figurais que podem ser utilizadas no trabalho com conteúdos de geometria durante seu ensino e aprendizagem.

Essa pesquisa foi realizada com 15 professores de matemática da rede pública de ensino de uma cidade ao norte do Estado do Paraná e foi submetida e aprovada pelo Conselho de Ética da Universidade local.

A ideia de trabalhar com professores parte do princípio de que esses sujeitos têm conhecimento de conceitos básicos de geometria, o que possibilita a verificação, quase que exclusiva, das influências dos registros figurais, de tal modo que o objeto de estudo seja os registros, e não o conhecimento dos professores participantes.

Neste contexto, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica ofereceu fundamentações para as investigações, principalmente porque ela abrange, no conhecimento matemático, aspectos de "referência a um objeto" e de "transformação em outras representações" (DUVAL, 2011). E, além desses aspectos cognitivos, proporciona diversas opções metodológicas para o trabalho com a matemática.

Para analisarmos os dados, identificamos nas falas e nos registros discursivos – língua natural e formal –, os raciocínios mobilizados pelos professores em cada tipo de registro figural, com atenção especial aos aspectos referentes ao tratamento e às conversões.

Os Registros de Representação Semiótica em geometria

As representações semióticas auxiliam nos sistemas de representação que possuem dificuldades próprias de significado e funcionamento (DUVAL, 2012b). Tratando-se da geometria, "os objetos que aparecem podem, deste modo, ser diferentes dos tipos de objetos que a situação exige ver" (DUVAL, 2012a). Ou seja, ao visualizarmos somente um desenho (Expressão Gráfica) de um objeto matemático, por exemplo, um poliedro, não é simples perceber que este objeto tem particulares características como paralelismos, ortogonalidades, entre outros.

Para Duval (2011), os registros são sistemas semióticos criadores de novos conhecimentos que satisfazem, basicamente, duas condições:

- ✓ produzem representações que permitem acesso e exploração a objetos inacessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente;
- ✓ permitem transformações em novas representações.

Duval (2011, p. 98) explica: "Como exemplo de registros, consideramos a língua e as figuras geométricas euclidianas cujas formas podem ser reconhecidas ou construídas materialmente em 3D/3D[2]".

> para considerar um sistema semiótico como um registro, é preciso identificar as operações de produção de representações que ele permite executar de maneira original e específica. São essas operações criativas que caracterizam um registro, e não as regras de combinações válidas, para um sistema formal, ou de signos utilizáveis, para um código. Assim, cada frase produzida é

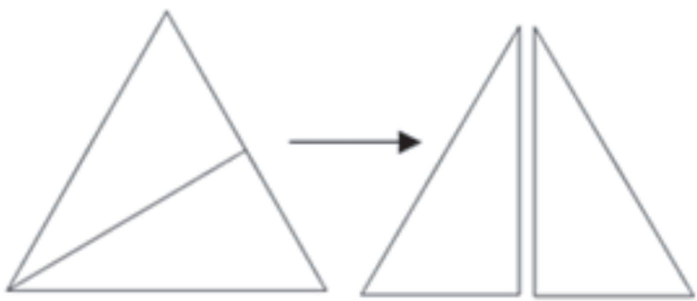
[2] "Toda passagem de uma dimensão a outra representa para o numerador da "fração", (mD/nD) um salto cognitivo considerável e, analogamente a passagem de uma representação física para uma representação numérica (mudança do denominador)" (DUVAL, 2011, p. 87).

> irredutível às palavras que ela combina. Duas frases podem empregar exatamente as mesmas palavras e não ter o mesmo sentido. Por exemplo: "O gato come o rato" e "O rato come o gato" (DUVAL, 2011, p. 83).

Para o pesquisador, para que um sistema semiótico seja um registro de representação, este deve permitir três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose[3] :

- ✓ a formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado: deve respeitar regras de utilização, de identificação, de reconhecimento da representação e a possibilidade de sua utilização para tratamentos;
- ✓ o tratamento: o tratamento é uma transformação que ocorre internamente ao registro, ou seja, realizam-se operações necessárias para uma questão ou um problema sem sair do registro inicial. Um exemplo de tratamento, no registro figural, é a transformação de um triângulo em dois triângulos com a mesma área, conforme a Figura 1:

Figura 1: Transformação de um triângulo em dois triângulos congruentes entre si



Fonte: Autores

[3] "Se é chamada "**semiose**" a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e "**noesis**" a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a **noesis** é inseparável da **semiose**" (DUVAL, 2012b, p. 270).

Assim, quando é efetuado um tratamento figural aliado a justificativas matemáticas, consideramos que ocorreu uma variação cognitiva no sujeito que possibilitou a resolução do problema em questão.

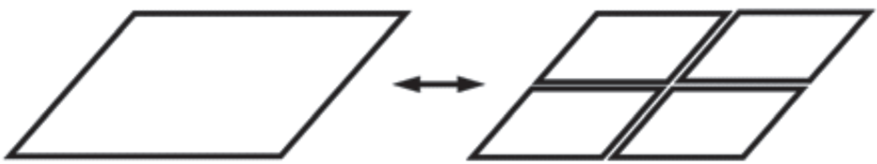
Essas várias modificações, que podem ser feitas nas figuras, se subdividem em: mereológicas, óticas e de posição:

- ✓ modificação mereológica: é a divisão de uma figura[4] em unidades figurais de mesma dimensão que podem ser combinadas em outra figura ou em diferentes subfiguras (DUVAL, 2012c, p. 288).

Duval (2005, p. 14) classifica a decomposição mereológica em três tipos:

a) estritamente homogênea: a decomposição preserva a forma da figura de partida, ou seja, as partes obtidas têm a mesma forma que o todo. O quadrilátero na Figura 2 exemplifica claramente esse tipo de modificação:

Figura 2: Modificação estritamente homogênea



Fonte: Duval (2005, p. 14)

b) homogênea: as unidades figurais obtidas pela decomposição têm forma diferente da figura de partida, porém mesma forma entre si. O quadrilátero da Figura 3 pode ser decomposto em dois triângulos, conforme segue:

[4] Consideram-se unidades figurais os elementos geométricos que compõem a figura, tais como os polígonos, as vértices, os segmentos de reta, as arestas, os ângulos, o ponto médio etc.

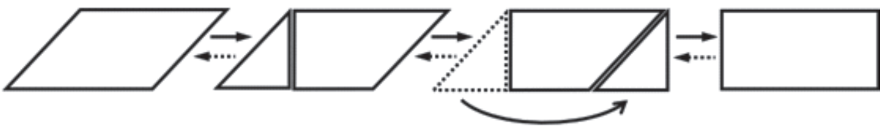
Figura 3: Modificação homogênea

Fonte: Duval (2005, p. 14)

Essa decomposição é visualmente reversível, e pode ser feita simplesmente ao se visualizar a forma da figura de partida.

c) heterogênea: as unidades figurais obtidas após a decomposição possuem formas diferentes entre si. Por exemplo, a transformação de um paralelogramo em um retângulo, conforme Figura 4.

Figura 4: Modificação heterogênea



Fonte: Duval (2005, p. 14)

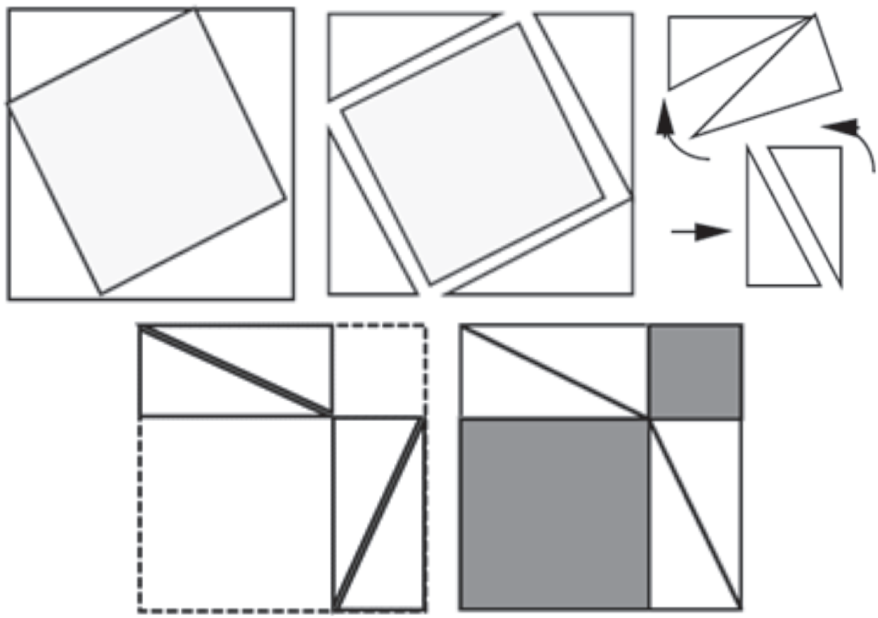
Para tal transformação, dividimos o paralelogramo em um triângulo e em um trapézio e, em seguida, fizemos o reagrupamento dessas duas unidades figurais.

Para a decomposição mereológica, Duval (2005) apresenta duas particularidades:

- ✓ ela pode ser feita materialmente (da mesma forma que juntar as peças de 1 quebra-cabeça), graficamente (por meio de traços) ou visualmente;
- ✓ muitas vezes, a divisão mereológica não tem relação direta com o discurso matemático e, por esse motivo, necessita de um apoio visual para se verificar propriedades geométricas e resolver problemas propostos.

A seguir, tem-se um exemplo de um tratamento puramente figural de reconfiguração que constitui uma representação autossuficiente para o conhecido teorema de Pitágoras (DUVAL, 2005, p. 31).

Figura 5: Teorema de Pitágoras

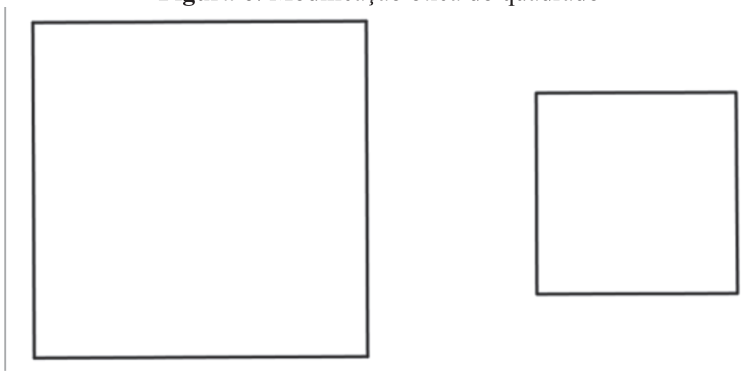


Fonte: Duval (2005, p. 31)

Inicialmente, são realizadas operações de separação mereológica heterogênea na unidade figural inicial (o quadrado), transformando-a em outras unidades figurais (1 quadrado e 4 triângulos) – primeira reconfiguração. Em seguida, os quatro triângulos são justapostos, formando-se dois retângulos – segunda reconfiguração, de modo a se obter a mesma região da figura inicial (o quadrado).

- ✓ Modificação ótica: essa operação consiste em manter a mesma forma e orientação da figura inicial, fazendo variar somente o tamanho: aumentar ou diminuir uma figura transformando-a em outra, de modo que esta seja vista como sua imagem.

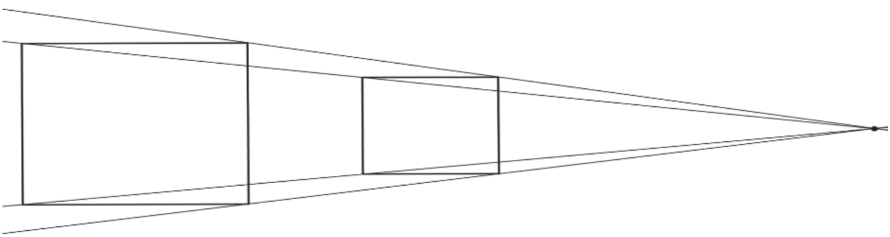
Figura 6: Modificação ótica do quadrado



Fonte: Baseado em Duval (1999, p. 158)

Tal deformação também possibilita a justaposição em profundidade de duas figuras semelhantes com uma modificação do plano em relação ao plano fronto-paralelo, como um jogo de lentes e espelhos (DUVAL, 2012b, 2012c).

Figura 7: Uma situação de homotetia

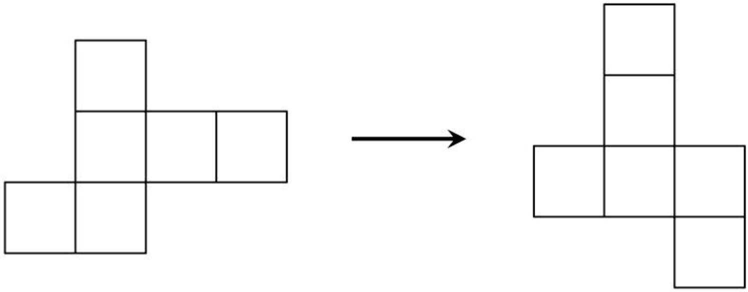


Fonte: Baseado em Duval (1999, p. 159)

Fatores tais como a figura inicial e a figura modificada possuírem a mesma orientação e o mesmo centro de homotetia auxiliam na visibilidade dessa operação (DUVAL, 2012c).

- ✓ Modificação posicional: consiste em preservar o tamanho e a forma da figura de partida, mas com variação de orientação, com deslocamento (translação), rotação e reflexão da figura com relação ao campo de referência em que ela se encontra (DUVAL, 2012b, 2012c).

Figura 8: Modificação posicional (rotação)



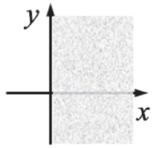
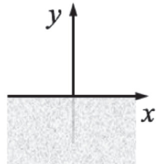
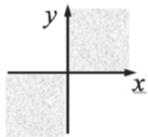
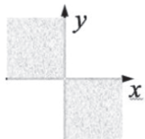
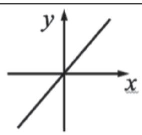
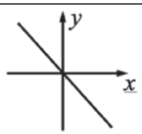
Fonte: Baseado em Duval (1999, p. 165)

Neste trabalho, o estudo das figuras, no que consiste às modificações, está condicionado mais às mereológicas e posicionais do que óticas.

- ✓ A conversão: é uma transformação diferente e independente do tratamento que consiste na representação em outro registro conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial: “Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro” (DUVAL, 2009, p. 58). Não existe e não podem existir regras de conversão do mesmo modo que existem as regras de tratamento.

Como exemplo de conversão, temos da língua natural (I) para a expressão algébrica (II) e para a representação gráfica cartesiana (III), representada no Quadro 1:

Quadro 1: Conversão

I	II	III
1. ... o conjunto de pontos que têm abscissa positiva	$x > 0$	
2. ... que têm ordenada negativa	$y < 0$	
3. ... cujas abscissa e ordenada têm o mesmo sinal	$xy > 0$	
4. ... cujas abcissa e ordenada têm sinais diferentes	$xy \leq 0$	
5. ... cuja ordenada é igual à abscissa	$y = x$	
6. ... cuja ordenada é oposta à abscissa	$y = -x$	

Fonte: Duval (2012b, p. 274)

Desse modo, entendemos que quando o aluno é capaz de coordenar espontaneamente os vários registros de representação de um mesmo objeto, significa que ocorreu uma construção de determinado conceito ou conteúdo (DUVAL, 2012b).

O uso de Materiais Manipuláveis, do *Software* GeoGebra e das Expressões Gráficas como registros figurais

Para realizar essa investigação, utilizamos Materiais Manipuláveis, o *Software* GeoGebra e Expressões Gráficas, para representar figuras geometricamente. Consideramos essas três formas de ver as figuras como registros figurais, ou seja, como sistemas de representação que permitem abstrações cognitivas utilizáveis em resolução de problemas ou em reconhecimentos de propriedades geométricas.

Para essa pesquisa, estabelecemos como Material Manipulável todos os objetos com fins de ensino que podem ser manipulados pelo sujeito, por meio de tratamento:

> Alguns não possibilitam modificações em suas formas: é o caso dos sólidos geométricos construídos em madeira ou cartolina, por exemplo, que por serem estáticos permitem só a observação. Outros já permitem uma maior participação do aluno: é o caso do ábaco, do material montesso-riano (cuisenaire ou dourado), dos jogos de tabuleiro (LORENZATO, 2006, p. 18-19).

Com os Materiais Manipuláveis, é possível representar objetos geométricos 3D, preservando sua dimensão de modo a identificar seus elementos figurais e manipular os objetos para visualizá-los em diferentes perspectivas.

As operações figurais que podem ser realizadas com os materiais advindos de recortes, colagens, translações, rotações, comparações, entre outros, auxiliam no raciocínio para a resolução matemática de um problema geométrico. Ou seja, o uso de MM motiva os seus participantes a pensar, elaborando suas próprias estratégias e ações.

Lorenzato (2006) escreve que os MM facilitam a realização de descobertas e permitem um trabalho menos formal. Eles também possibilitam que seus participantes identifiquem os conceitos elementares da matemática e construam várias representações mentais, baseadas nas representações semióticas aparentes. “Na disciplina de Matemática, […], o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p. 23).

Desse modo, a atividade proposta, que apresentaremos neste capítulo, contou com a utilização desse material, de modo que possibilitou ao sujeito modificações e operações visuais por meio do tratamento figural e também a mobilização de outros registros.

Utilizamos também o *Software* GeoGebra para representar figuras geométricas. A utilização dos *Softwares* de geometria possibilita a representação de objetos 0D, 1D, 2D e 3D, preservando suas dimensões. Também permite observar cada objeto geométrico com a dinamicidade e o ponto de vista necessário para a resolução de um problema, por exemplo.

Outra vantagem é a realização de construções e operações e a facilidade em apagá-las ou salvá-las, quantas vezes for necessário, até se chegar às conclusões novas e à solução do problema: “Uma das vantagens do uso do GeoGebra é que suas construções são dinâmicas [...]. Isso permite que o sujeito faça grande quantidade de experimentações que lhe possibilite construir proposições geométricas” (GERÔNIMO; BARROS; FRANCO, 2010, p. 11).

Os *Softwares* de geometria também permitem a construção de figuras geométricas planas e espaciais; a identificação de elementos figurais, como pontos médios; a construção precisa de planos e retas paralelas e perpendiculares, com comandos básicos; o cálculo exato de comprimentos e áreas de figuras geométricas planas; além da visualização exterior e interior de objetos tridimensionais por várias perspectivas.

Por fim, Borba (1999) afirma que o uso de tecnologias em geral pode deixar os alunos suscetíveis a novas descobertas que proporcionam mudanças e progressos no conhecimento.

Da mesma forma, com base na leitura sobre registros figurais de Raymond Duval, admitimos as figuras realizadas por meio da

Expressão Gráfica como um registro figural, desde que se entenda por Expressão Gráfica as figuras construídas com o uso de materiais que auxiliem na produção de desenhos e, principalmente, figuras em geral que comunicam uma ideia, um conceito ou um pensamento.

As Expressões Gráficas representam um tipo de registro figural convencional, consistindo em um dos registros mais utilizados nas aulas de geometria, por sua facilidade de acesso e forte presença nos livros didáticos de matemática.

Para fazer uma representação na forma de Expressão Gráfica, o aluno poderá dispor de folhas de papel, lápis, borracha, régua graduada ou não, compasso, esquadro – na verdade, instrumentos comuns para desenho –, e dos conhecimentos específicos para a ação.

Com base nas aplicações da sequência de tarefas desta investigação, foi possível perceber que os professores possuem maior intimidade com o uso desses instrumentos durante a resolução dos problemas de geometria, arriscando possíveis soluções por meio de esboços de desenhos.

Ao se usar as EG para o registro de figuras, há a recorrência maior aos aspectos algébricos para a resolução dos problemas, diferente do uso dos MM e dos *softwares*. Ou seja, há uma tendência a se recorrer ao uso da álgebra para o cálculo de possíveis proporções e relações que permitem traduzir e solucionar o problema proposto. Às vezes, há um apelo aos aspectos métricos, mas não tanto quanto aos algébricos.

Em representações de figuras tridimensionais, Passos (2000) ressalta que o indivíduo precisa ser capaz de imaginar o resultado final, antecipar mentalmente e inferir corretamente a forma plana (bidimensional) e as transformações necessárias para apresentá-la na forma espacial (tridimensional), por exemplo.

Dessa forma, é necessário, além de tudo, que o indivíduo mobilize conhecimentos específicos sobre o objeto a ser representado ou também reconheça suas propriedades e principais características ao visualizá-lo na forma de Expressão Gráfica.

De acordo com Duval (2011), as figuras na geometria apresentam três características que lhes conferem um poder cognitivo específicas:

têm valor intuitivo, permitem reconhecimento praticamente imediato dos objetos e podem ser construídas com régua, com compasso ou com um *software*.

Para realizar essa investigação das influências dos registros figurais, desenvolvemos uma pesquisa baseada em uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo realizada com 15 professores de matemática da Educação Básica da rede estadual de ensino de uma região ao norte do Estado do Paraná.

A atividade foi aplicada individualmente com cada professor participante. Durante a aplicação, assim como sugere Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2004), o pesquisador deve ser capaz de estabelecer uma relação de confiança com os sujeitos, ser bom ouvinte, formular perguntas, ter familiaridade com as questões investigadas e ter flexibilidade para se adaptar a situações inesperadas.

Para as respostas, solicitamos justificativas oralmente e por extenso, na forma de língua natural e formal, pois Duval (2011) afirma que "Pensar em matemática mobiliza sempre pelo menos dois registros", e, "em geometria, mobilizamos a linguagem e a visualização" (DUVAL, 2011, p. 99).

No decorrer da apresentação das análises utilizamos fragmentos das entrevistas e das respostas escritas dos professores para justificar as conclusões realizadas. As informações analisadas estão subdivididas em unidades de análise com a seguinte prescrição: A1 e A2. E os professores colaboradores, indicados por P1, P2, P3, e assim por diante, até P15.

O objetivo da atividade aplicada foi explorar propriedades por meio dos registros figurais numa progressão de manipulações práticas até seus registros discursivos. Duval (2011, p. 140) afirma que "a questão chave da interpretação é então aquela das transferências internas de um modo a outro e de um registro a outro" (DUVAL, 2011, p. 140).

O problema proposto envolve conceitos de geometria e é possível de ser resolvido utilizando registros figurais tanto na forma de Material Manipulável, quanto do *Software* GeoGebra e como Expressão

Gráfica. Estes registros foram previamente selecionados e disponibilizados, para o momento da aplicação, aos professores colaboradores para resolução.

Os professores participantes foram divididos em três grupos de cinco pessoas cada, onde as ordens de apresentação dos registros foram variadas, a saber:

Grupo 1: primeiro SG, em seguida EG e por último MM.
Grupo 2: primeiro MM, em seguida SG e por último EG.
Grupo 3: primeiro EG, em seguida MM e por último SG.

Mesmo quando o professor participante resolvia, corretamente ou não, o problema com o primeiro registro, apresentamos a ele também o segundo e o terceiro registro, na ordem de cada grupo, de modo a tornar possível investigar se estes registros influenciariam na resposta dada anteriormente, fazendo-o, talvez, repensar a sua solução; e também verificar se surgiriam novas ideias para a resolução do problema.

A aplicação da atividade contou com gravação de áudio e registro da resolução de cada problema em uma folha que entregamos no início. Até mesmo para os professores que não chegaram à solução, houve o pedido de registro discursivo sobre o máximo de conclusões retiradas a respeito do problema com base nos tipos de registros figurais oferecidos para a resolução. Além de permitir analisar os registros mobilizados pelos professores para a resolução dos problemas, esta estruturação dos dados permitiu que percebêssemos os tratamentos efetivados e a interpretação figural realizada pelo professor com base em cada tipo de registro oferecido (MM, SG, EG).

As resoluções individuais dos professores participantes foram analisadas com base em seus raciocínios expostos na forma de registro discursivo (língua natural e formal) levando em consideração os sucessos, hesitações e fracassos, com atenção especial aos tratamentos e mobilizações de outros registros. Para a análise, usamos a produção oral e escrita, porque Duval (2011) afirma que "a produção oral e escrita não têm os mesmos papéis na tomada de consciência [...] das unidades de sentido matematicamente pertinentes em uma representação" (DUVAL, 2011, p. 105). Ou seja, pode parecer simples falar sobre determinado assunto oralmente, mas, diante da necessidade de escrever tal raciocínio, surgem questões manifestadas pela tomada de consciência e organização da escrita.

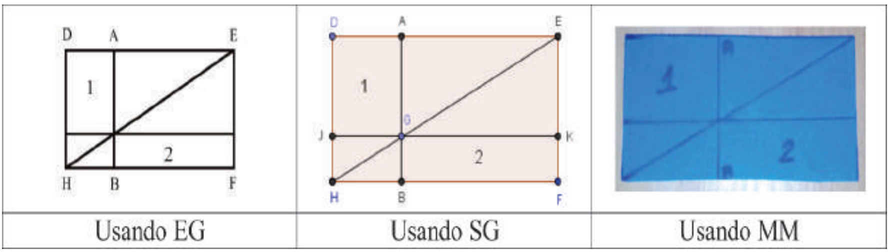
Atividade e resultados

A atividade a seguir foi implementada com professores de matemática da Educação Básica, sujeitos da pesquisa. Nesta parte do texto, será apresentada essa atividade e suas soluções para fazer uma análise a respeito de alguns aspectos relacionados aos tratamentos e mobilizações figurais.

No início da atividade, foi disponibilizado aos professores colaboradores lápis, borracha, caneta, régua, tesoura, cola e a folha de resposta. Os rascunhos foram realizados em uma folha entregue à parte.

Problema de Euclides: Mostrar a igualdade das áreas 1 e 2, qualquer que seja a posição do segmento $\overline{AB}$ (DUVAL, 1999, p. 157).

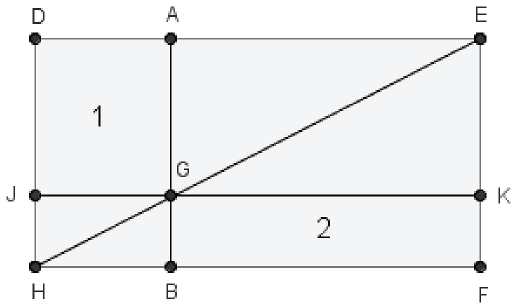
Figura 9: Registros figurais



Fonte: DUVAL, 2012a, p. 129; e autores

Este problema pode ser resolvido por uma modificação figural do tipo mereológica, fazendo uma operação de reconfiguração que consiste no fracionamento da figura inicial em subfiguras. Neste caso, por congruência entre os triângulos $G\hat{A}E \equiv E\hat{K}G$ e entre $H\hat{J}G \equiv G\hat{B}H$, conclui-se, a igualdade entre as áreas dos quadriláteros 1 e 2, conforme a Figura 10.

Figura 10: Solução da atividade



Fonte: Autores

O objetivo principal desta atividade foi, por meio da variação do tipo de registro figural, analisar a compreensão, ou seja, o alcance em termos de autonomia e progressão do sujeito durante a resolução do problema. Para isso, esta análise foi dividida em duas unidades:

A1) se houve tratamento figural para resolver o problema: caso tenha havido, verificar se ocorreram variações cognitivas (interação de tratamento figural com tratamento discursivo).

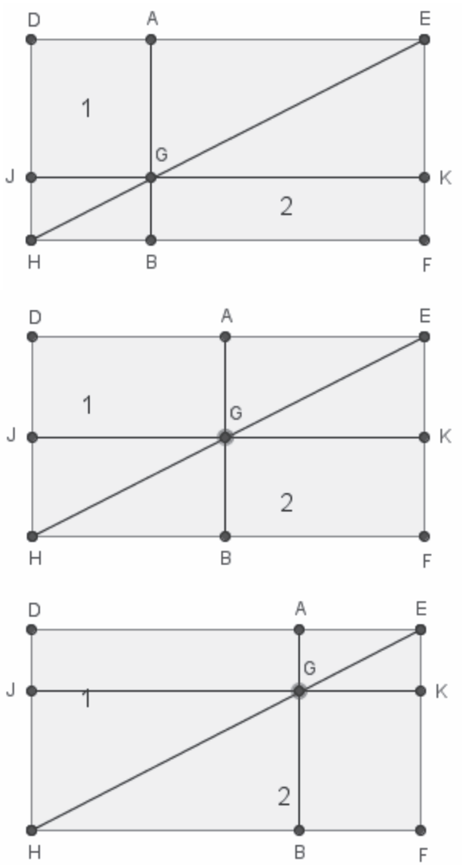
Analisamos se, durante o contato com os diferentes tipos de registros figurais, ocorreram tratamentos figurais e também a simultaneidade com o tratamento discursivo. Duval (1999) explica que os tratamentos parecem vir de leis de organização figural de percepção visual e, como consequência do entendimento, ocorre um discurso teórico usado para se comunicar, no caso, as variações cognitivas.

Para resolução desta atividade, era extremamente necessário que se efetuassem tratamentos figurais em busca de demonstrar dedutivamente a igualdade das áreas 1 e 2. Dessa forma, como justificativa para a solução, o tratamento discursivo seria consequência do tratamento figural realizado.

A seguir, apresentaremos as análises realizadas em cada grupo:

Grupo 1: Neste grupo, iniciamos com o SG e todos os professores efetuaram tratamento figural transladando o segmento $\overline{AB}$ por meio do ponto G de intersecção deste com a diagonal do retângulo, conforme a Figura 11, de modo a observar (visualmente) que as áreas 1 e 2 continuavam as mesmas.

Figura 11: Modificações posicionais no retângulo

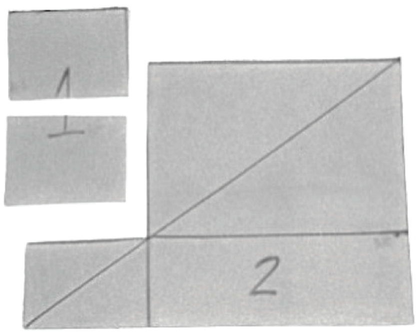


Fonte: Autores

A passagem deste ponto (ponto G) pelo ponto médio da diagonal do retângulo permitiu aos professores intuir que as áreas 1 e 2 eram iguais.

Ainda neste grupo de professores, nenhum professor efetuou tratamento figural com o registro da EG, e somente um professor realizou tratamento figural com o MM, fazendo o recorte da área 1, de modo que suas partes pudessem ser sobrepostas à área 2, conferindo, assim, a igualdade das áreas, conforme a Figura 12.

Figura 12: Recorte da parte 1 para sobrepor na parte 2



Fonte: Autores

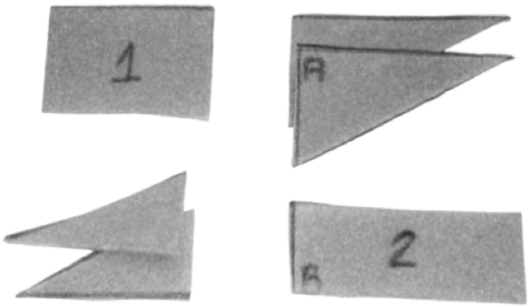
Grupo 2: Neste grupo, o registro figural inicial foi o Material Manipulável. Com este registro, três professores realizaram um tratamento figural, e todos da mesma forma: recortando a área 1 e sobrepondo à área 2. Observamos variação cognitiva, pois estes professores efetuaram um tratamento discursivo para explicar o tratamento figural que haviam feito. Conforme o relato escrito de P8: “Usando o material manipulável foi possível mostrar a equivalência das partes recortando 1 e sobrepondo em 2”.

No SG, três professores transladaram o segmento $\overline{AB}$ para encontrar solução para o problema, porém somente dois deles relataram o tratamento realizado. Já no uso do registro da EG, nenhum professor efetuou tratamento figural tentando encontrar uma solução para o problema.

Grupo 3: Neste momento da aplicação da atividade, iniciamos com o registro figural na forma de Expressão Gráfica. Com este registro, um professor efetuou tratamentos figurais no desenho e descreveu, utilizando raciocínio dedutivo por meio de linguagem natural e formal, os tratamentos efetuados na figura e resolveu corretamente o problema.

Em seguida, ao disponibilizar o MM, todos os professores efetuaram tratamentos figurais, porém o professor que já havia resolvido o problema dedutivamente o fez de forma diferente dos demais. Ou seja, quatro professores recortaram a área 1 de modo que ela pudesse ser sobreposta à área 2 ou vice-versa, e, dessa forma, verificaram empiricamente a igualdade das áreas. Porém, o outro professor recortou todas as subfiguras da figura (retângulos e triângulos) e fez a sobreposição dos triângulos congruentes para concluir que as áreas 1 e 2 eram iguais, conforme a Figura 13:

Figura 13: Tratamento figural no MM



Fonte: Autores

Com o SG, houve a interação de três dos cinco professores efetuando a trane descrevendo discursivamente o que foi realizado, também atentos ao ponto médio da diagonal do retângulo, conforme abaixo:

> P11: Utilizando o GeoGebra, moveria o segmento AB de forma a dividir a figura em 4 retângulos de iguais medidas.
> P12: Ao observar a figura e mover o ponto de intersecção, consegui visualizar de imediato o

movimento e a semelhança das áreas 1 e 2, com base no ponto médio.

Considerações: é interessante observar que os tratamentos a serem realizados em cada registro foram diferentes. Podemos destacar que com o MM houve manuseio, recorte e sobreposição de partes; no SG, translação do segmento AB até o ponto médio da diagonal; e na EG, separação das sub figuras da figura.

Por fim, com base nas observações e dados dos grupos 1, 2 e 3, notamosque, no que se refere a tratamentos que podem ser efetuados nas figuras, o *Software* de Geometria e o Material Manipulável possibilitaram mais transformações desse tipo, suscitando a criatividade e, consequentemente, o uso do raciocínio lógico para solucionar o problema. Esses registros também encaminharam os sujeitos para que estes pudessem discursar a respeito de suas ideias, proporcionando uma organização estruturada do pensamento, conforme constatado nos registros discursivos desses professores colaboradores.

A2) Se houve mobilização de um segundo registro para resolver o problema: caso tenha havido, verificar se ocorreu discriminação das unidades figurais dos registros de partida no registro de chegada.

Com relação à mobilização de um segundo registro na tentativa de solucionar o problema proposto, Duval (2011) explica que, durante uma compreensão matemática, o sujeito mobiliza sempre, pelo menos, dois registros de representação semiótica. Buscamos, ao analisar nesta pesquisa a mobilização de outros registros, identificar a possível compreensão do problema, bem como de sua solução.

Para resolução desta atividade, era necessário que se mobilizasse o registro da língua formal com o intuito de demonstrar a congruência entre os triângulos $G\hat{A}E$ e $E\hat{K}G$, $H\hat{j}G$ e $G\hat{B}H$.

Tal mobilização deve ser feita por meio da identificação das unidades figurais do registro de partida (figural), bem como os lados e os ângulos congruentes, representados também no registro de chegada (língua formal ou simbólica).

A seguir, apresentaremos as análises de cada grupo neste aspecto:

Grupo 1: Do total de cinco professores deste grupo, quatro mobilizaram outro tipo de registro durante o uso do SG:

- P1 fez uma passagem do registro figural para o registro numérico no momento em que se estabeleceu uma razão entre os lados das figuras 1 e 2.

- P2 fez uma passagem do registro figural para o registro da língua formal discriminando as unidades figurais de cada registro e utilizando um raciocínio dedutivo que solucionou o problema.

P2: O segmento $\overline{EH}$ é a diagonal da figura DEFH, então $\Delta DEH \approx \Delta EFH$. A diagonal do $\overline{EG}$ do retângulo AIEG o divide em 2Δs equivalentes. O mesmo ocorre no retângulo BGJA.

Logo, temos que as partes 1 e 2 são equivalentes.

- P3 fez uma passagem do registro figural para o registro numérico quando se utilizou a ferramenta “polígono”, selecionou os dois retângulos e, com a ferramenta “área”, calculou a área de cada um deles e comprovou que eram iguais.

- P4 fez uma passagem do registro figural para o registro da língua natural descrevendo o raciocínio que o fez concluir o problema por extenso e em linguagem natural.

No uso da EG, observamos duas mobilizações de outros registros. Seguem:

- P1, que permaneceu na passagem feita anteriormente no SG, do registro figural para o registro numérico, estabelecendo razões e proporções entre as áreas.

- P3, que permaneceu na passagem do registro figural para o registro numérico medindo os lados dos polígonos 1 e 2 e calculando suas áreas.

No último registro entregue, o MM, obtiveram-se, também, duas mobilizações, ambas do registro figural para o registro numérico, feitas por P1 e P3. Vale enfatizar que P1 mudou do raciocínio de razão e proporção para o cálculo da área de cada polígono de modo a verificar se eram iguais, enquanto P3 permaneceu no cálculo das áreas conforme os registros anteriores.

Grupo 2: No grupo 2, a atividade se iniciou com o registro figural na forma de Material Manipulável. Para resolver esta atividade com este recurso, somente um professor efetuou uma mobilização de registro, sendo esta do registro figural para o registro numérico, medindo os lados dos polígonos 1 e 2 de modo a calcular suas áreas e verificar a igualdade.

O próximo registro disponibilizado foi o SG. Neste registro, outros dois professores efetuaram mobilização do registro figural para o registro da língua formal. Estes discriminaram as unidades figurais (vértices, diagonal, segmentos de reta, retângulos), em seguida utilizaram a linguagem simbólica para representar cada uma dessas unidades figurais (notação para vértices, segmentos, congruência, equivalência, igualdade), e um deles concluiu formalmente a demonstração da igualdade das áreas 1 e 2 de maneira correta.

Ao disponibilizar o registro na forma de EG, três professores, inclusive o professor que já havia resolvido o problema dedutivamente, sugeriram o uso de régua para medir os lados dos polígonos 1 e 2 e verificar a igualdade de suas áreas, ou seja, mobilizaram o registro figural para o numérico.

Grupo 3: Neste grupo, apresentamos, primeiramente, o registro figural na forma de Expressão Gráfica. Neste registro, quatro professores mobilizaram outros registros de representação, sendo três do registro figural para o numérico e um do registro figural para o registro da língua formal. A mudança do figural para o numérico foi feita por meio de anotações de medidas e cálculo de área (2 professores) e pelo uso de razão e proporção (1 professor): P11: "Utilizando a expressão gráfica para a resolução, usei a régua para verificar as dimensões (comprimento x largura) das partes 1 e 2 e calculei as duas áreas demonstrando a igualdade entre elas".

Após disponibilizarmoso MM, nenhum professor efetuou qualquer tipo de mobilização do registro figural para outro tipo de registro, ficando restritos ao tratamento neste material.

Quando foi apresentada a mesma figura, porém no SG, houve manifestação de duas transformações de registros: P11, que havia feito a mudança do figural para o numérico na EG, fez no SG uma mobilização do figural para a língua formal; e P13, que havia sugerido o uso de razão e proporção na EG, fez uso do cálculo das áreas 1 e 2 usando as ferramentas que o *software* disponibiliza.

Considerações: por meio destas informações, percebemos que o registro da EG foi o que proporcionou maior intenção de mobilização em relação aos outros registros de representação, porém quase sua totalidade foi do registro figural para o registro numérico. Duval (2011) afirma que, para aprender, os sujeitos devem trabalhar sem recorrer inicialmente a aspectos métricos, ou seja, eles devem compreender inicialmente os aspectos qualitativos dos objetos geométricos que estão sendo trabalhados para poderem interiorizar as operações figurais e suas relações geométricas. Na interação do professor com o SG, foi possível perceber também várias mobilizações para outros registros, maior – 8 para 3 – do que no contato com o MM. O SG proporcionou o maior número de mobilizações do registro figural para o registro da língua formal (linguagem simbólica); já o MM não provocou nenhuma transformação deste tipo, sendo todas do figural para o numérico, conforme descrevemos e observamos anteriormente.

Considerações finais: implicações para o ensino de matemática

Conforme os raciocínios explicitados pelos professores no decorrer das aplicações do problema que levou à análise dos dados, concluímos que quanto ao uso de tratamento figural para resolver o problema, em cada tipo de registro figural – Materiais Manipuláveis, *Software* GeoGebra e Expressões Gráficas –, os professores realizavam tratamentos diferentes. Tal fato reforça a ideia de que é importante que o aluno conheça e compreenda as várias representações para um mesmo objeto matemático, pois cada uma delas desenvolve aspectos cognitivos e matemáticos particulares. Em conformidade com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, é o conhecimento e a coordenação das várias representações para um mesmo objeto que possibilita a construção do conhecimento. Na atividade realizada, o SG se destacou por proporcionar maior interação do sujeito na realização de tratamentos figurais. Também houve destaque do MM, que encaminhou os sujeitos para que discorressem melhor sobre suas ideias, direcionando-os para uma organização estruturada de pensamento, conforme observado nos registros discursivos dos professores colaboradores.

Quanto à mobilização de um segundo registro para resolver o problema, os registros figurais na forma de EG se destacaram por induzir os professores colaboradores à transformação do registro figural para o registro numérico. É importante ressaltar que tal problema foi proposto com a intenção de que os sujeitos, ao ter contato com os registros, utilizassem deduções matemáticas, pois o uso de cálculos serve para verificar e não demonstrar resultados. Com relação ao SG, este foi o registro que possibilitou o maior número de conversões do tipo figural para língua formal. Talvez isso se deva à dinâmica que a figura possui quando representada neste tipo de representação figural.

Por fim, esta pesquisa mostra que, ao utilizar diferentes registros figurais na resolução de problemas de geometria, fatores referentes aos tratamentos e às mobilizações de registros são modificados, gerando consequências diretas na compreensão da figura, de suas propriedades e, consequentemente, da geometria. Do ponto de vista matemático, Duval (2011) explica que a solução do problema é o que demonstra os diferentes conhecimentos que permitem resolvê-lo, no entanto, do ponto de vista cognitivo, são analisados os processos que permitem reconhecer os conhecimentos matemáticos a serem empregados.

Referências

ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith; GEWANDZNAJDER, Fernando. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais**: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 285-295.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidade del Valle, 1999.

_____. Les conditions conitives de l'apprentissage de la geometrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnement et coordination de leur fonctionnements. **Annales de Didactiqueet de Sciences Cognitives**, n. 10, p. 5-53, 2005.

_____. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

_____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

_____. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**, Florianópolis, v. 7, n.1, p. 118-138, 2012a.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012b.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**, Florianópolis, v.7, n. 2, p. 266-297, 2012c.

GERÔNIMO, João Roberto; BARROS, Rui Marcos de Oliveira; FRANCO, Valdeni Soliani. **Geometria Euclidiana Plana**: um estudo com o software Geogebra. Maringá: Eduem, 2010.

LORENZATO, Sérgio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: _____ (org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas: Autores Associados, 2006, p. 3-38.

PASSOS, Carmen Lúcia Brancaglion. **Representações, interpretações e prática pedagógica**: a geometria na sala de aula. Tese de Doutorado (Educação Matemática). Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2000.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

Capítulo 9

Algumas influências de objetos ostensivos e não ostensivos na compreensão do plano de poincaré com o *software* geogebra

Luciano Ferreira
Rui Marcos de Oliveira Barros

> A grande vantagem da linguagem é você ter algo de discurso novo para descrever uma coisa nova e a matemática não deixa de ser uma linguagem, então você tem que criar uma situação nova, não adianta ficar repetindo o que já foi dito. O objetivo da matemática não pode ser o que já foi feito. Isso não pode ser mais do que um instrumento para fazer um novo. Esse novo é difícil e não tem a resposta.
>
> Ubiratan D'Ambrosio

Este texto divulga resultados de uma pesquisa realizada com 17 alunos do 4° ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual do Paraná, Brasil. Foram dois os resultados principais alcançados na pesquisa: a detecção de conceitos não científicos (equivocados), surgidos pela manipulação de objetos ostensivos, mostrados na tela do *software* GeoGebra, e a detecção de obstáculos didáticos, advindos de conceitos geométricos euclidianos.

A fundamentação teórica da pesquisa consiste da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1999) e da Dialética do Policiamento Ostensivo e Não ostensivo (BOSCH, 2000). O tratamento dos dados coletados foi realizado mediante a utilização da Análise de Conteúdo de Bardin (1977). Com tal pesquisa, exibimos que o estudo de geometria não euclidiana pode ser realizado por intermédio do *software* GeoGebra, mas que, além de auxiliar a compreensão de uma nova métrica, tal uso pode acarretar o aparecimento de obstáculos didáticos.

Considerações iniciais

A motivação da pesquisa advém da alteração da legislação educacional no Estado do Paraná que instituiu a inclusão do assunto geometrias não euclidianas no currículo oficial no ano de 2008 (PARANÁ, 2008). A apresentação minuciosa da pesquisa realizada encontra-se em Ferreira (2011).

O estudo de geometria, seja ela geometria euclidiana ou geometria não euclidiana, faz-se mediante a utilização de registros, principalmente de registros gráficos e figurais. A importância da manipulação desses registros para o estudo de geometria nos leva a considerar nossa fundamentação sobre a teoria apresentada em Bosch (2000), tanto para preparar as atividades aplicadas aos alunos quanto na análise das resoluções registradas.

Bosch (2000, p. 19) define que, “durante a realização de uma tarefa matemática, trabalhamos com dois tipos de objetos: os objetos ostensivos e os não ostensivos”.

Os objetos ostensivos são os objetos manipuláveis na realização de uma atividade matemática. Eles são percebidos pelo indivíduo mediante seus sentidos, ou seja, são apreendidos pelo toque, pelo olhar e pelo ouvir. Por exemplo, a marca do grafite no papel, quando desenhamos uma representação de um segmento de reta, é um objeto ostensivo, o som que proferimos, quando dizemos “considere o segmento AB", é um objeto ostensivo ou a aresta de um cubo de madeira que é percebida com o tato na contagem de segmentos de reta de um cubo também é um objeto ostensivo.

Os objetos denominados de "não ostensivos" são objetos matemáticos, eles estão presentes numa tarefa organizada de matemática, mas não são percebidos pelos nossos sentidos. Os objetos não ostensivos são objetos como ideias, conceitos, intuições, definições, implicações lógicas, propriedades etc. Podemos dizer que o conceito de segmento de reta é um objeto não ostensivo que é associado a vários objetos ostensivos que o representam. O conceito (ou ideia) de variável é exemplo de objeto não ostensivo que difere do objeto não ostensivo incógnita, e ambos diferem do objeto não ostensivo parâmetro, apesar de poderem ser representados pelo mesmo objeto ostensivo, registrado com tinta no papel por meio da letra "x".

Assim, os objetos não ostensivos são objetos matemáticos, utilizados para manipularmos certos objetos ostensivos que lhes são associados. Em uma aula de geometria, é possível percebermos que a manipulação de objetos ostensivos, como o registro de uma circunferência feita no papel e o registro de uma reta também traçada com grafite no papel, permite a elaboração de relações entre objetos não ostensivos que podem ser enunciadas, por escrito ou verbalmente, com objetos ostensivos – a interseção de uma circunferência e uma reta consiste de nenhum, um ou dois pontos.

Existe, então, uma dicotomia entre objetos ostensivos e objetos não ostensivos. Uns são necessários para o registro dos outros e os últimos são necessários para manipular os registros utilizados. Bosch (2000, p. 4) denomina tal dicotomia de "Dialética do policiamento ostensivo e não ostensivo".

Nessa dialética, objetos não ostensivos emergem da manipulação de objetos ostensivos, mas, ao mesmo tempo, essa manipulação é sempre controlada por objetos não ostensivos.

Voltando à situação da sala de aula, percebemos que, na enunciação da relação de interseção entre reta e circunferência, partimos de objetos não ostensivos, reta e circunferência, adotamos o registro ostensivo desses dois objetos, manipulamos tais registros ostensivos, colocando-os em diferentes posições e, como resultado dessa manipulação de ostensivos, obtemos um novo objeto não ostensivo, denominado proposição, que volta a ser novamente representado por objetos ostensivos na forma de letras no papel.

Outra fundamentação teórica de nossa pesquisa, a Teoria Antropológica do Didático (TAD), de Chevallard (1999), salienta a origem dos conceitos matemáticos (não ostensivos) e sua relação com os objetos que o representam (ostensivos), em termos da dialética citada anteriormente, ou seja, os conceitos guiam e controlam a manipulação dos ostensivos, mas conceitos também são emergentes da manipulação ostensiva em determinadas organizações didáticas.

Podemos ilustrar essa situação na sala de aula, quando consideramos a manipulação de objetos ostensivos relativos a funções polinomiais cujos monômios são todos de grau par. A manipulação de registros, como os ostensivos algébricos que representam as funções dessa classe, permite a conclusão de que os valores funcionais dessas funções em abscissas positivas são iguais aos valores funcionais nos opostos aditivos de tais abscissas. Com tais experimentações, podemos manipular ostensivos algébricos, referentes a funções não polinomiais, de maneira que possamos construir um conceito generalizado de função par (não ostensivo) e enunciar com ostensivos, escrevendo que "uma função definida por será uma função par se para toda abscissa x no domínio da função".

Segundo Bosch (2000, p. 4), os conceitos emergem do trabalho com os ostensivos, em resposta a questões e tarefas e em um entorno tecnológico-teórico, dado a essa prática, que, ao ser institucionalizada ou formalizada, estabelece relações entre os ostensivos e não ostensivos que permitirão aos primeiros se referirem ou representarem os segundos em possíveis atividades futuras.

Para Bosch:

> La Teoría Antropológica atribuye a los objetos ostensivos, al lado de su valencia semiótica, una

> valencia instrumental ligada a la capacidad de los sistemas de ostensivos para integrarse en manipulaciones técnicas, tecnológicas y teóricas. Desde el momento en que se consideran los objetos ostensivos como constitutivos de las organizaciones matemáticas y los ingredientes primarios de las tarefas, técnicas, tecnologías y teorías, se presentan, en primer lugar, como instrumentos de la actividad matemática, herramientas materiales sin las cuales no se podría realizar la actividad. Y, al igual que el albañil con su paleta (cuya valencia semiótica, dicho sea de paso, es innegable), lo que importa al realizador de la actividad matemática (y a todo aquél que debe reproducirla o hacer la reproducir), lo importante no es tanto lo que la herramienta pueda representar, sino su adecuación y efectividad en la realización de la actividad (BOSCH, 2000, p. 8).

Outra fundamentação utilizada em nossa pesquisa é a de que conhecimentos já sedimentados no intelecto do estudante podem dificultar a construção de novos conhecimentos. Essa é a noção de obstáculos didáticos que, segundo Pais (2002), são conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem escolar.

Os obstáculos didáticos são

> aqueles que parecem depender apenas de uma escolha ou um projeto do sistema educativo e provocado por uma transposição didática, que o professor dificilmente pode renegociar no quadro restrito da classe. Eles nascem da escolha de estratégias de ensino que permitem a construção,

> no momento da aprendizagem, de conhecimentos cujo domínio de validade é questionável ou incompletos que, mais tarde, revelar-se-ão como obstáculo ao desenvolvimento da conceituação (BROUSSEAU, 1983 apud ALMOULOUD, 2007, p. 141).

Almouloud (2007), utilizando-se das ideias de Durox e Brousseau, traça a caracterização de obstáculos:

> a) Um obstáculo é um conhecimento, uma concepção, e não uma dificuldade, ou uma falta de conhecimento; b) Esse conhecimento produz respostas adequadas em certo contexto frequentemente encontrado; c) Mas ele produz respostas falsas, fora desse contexto. Uma resposta correta e universal exige um ponto de vista notavelmente diferente; d) Além disso, esse conhecimento resiste às contradições com as quais ele é confrontado e ao estabelecimento de um conhecimento novo. Não basta ter um conhecimento novo para que o precedente desapareça (é o que diferencia o transpor de obstáculos da acomodação de Piaget); é então, indispensável identificá-lo e incorporar a sua rejeição no novo saber; e) Depois da tomada de consciência de sua inexatidão, ele continua a manifestar-se de modo intempestivo e obstinado (ALMOULOUD, 2007, p. 133).

Artigue (1990, *apud* ALMOULOUD, 2007) identificou alguns fatores que podem ser produtores de obstáculos, são eles: a generalização abusiva, a regularização formal abusiva, a fixação em uma contextualização, a aderência exclusiva a um único ponto de vista e o amálgama de noções. Mas abordaremos, neste texto, apenas a noção de obstáculos didáticos, advindos da manipulação de ostensivos mostrados na tela do *software* GeoGebra. Tais obstáculos parecem ser aqueles que têm "origem didática que parecem depender apenas de uma escolha ou de um projeto do sistema educativo (BROUSSEAU, 1983 apud ALMOULOUD, 2007).

Com o aporte de tais teorias, passemos a descrever a pesquisa.

Questões metodológicas

Com a fundamentação teórica explicada anteriormente, planejamos 19 atividades que possibilitavam a construção do conceito de geometria hiperbólica mediante consideração do modelo do plano de Poincaré. As atividades foram aplicadas a 17 alunos do 4° ano de Licenciatura em Matemática de uma universidade situada numa cidade do noroeste do Estado do Paraná. A aplicação se deu na forma de um minicurso de 20 h, distribuídas em tarefas diárias de 4 h. As atividades eram fornecidas em papel impresso com os roteiros a serem seguidos pelos alunos. À medida que desenvolviam as atividades, os alunos respondiam por escrito a algumas questões na própria folha de trabalho, em espaços apropriados reservados para isso. As folhas eram recolhidas ao final das atividades para posterior análise das respostas escritas. As atividades realizaram-se num dos laboratórios de informática da universidade e houve a disponibilidade de um computador por aluno.

Essas atividades visavam elucidar as seguintes questões da pesquisa:

a) verificar a possibilidade de aparecimento de conceitos não científicos (equivocados), advindos da manipulação de objetos ostensivos, mostrados na tela do computador;

b) detectar manifestações de possíveis obstáculos provenientes da constituição de conceitos euclidianos na aprendizagem de uma nova geometria;

c) verificar se o uso de instrumentos digitais para a representação de situações geométricas facilita a aprendizagem dos conceitos envolvidos.

O planejamento de tal abordagem tem o suporte das teorias apresentadas anteriormente. A construção do objeto não ostensivo "geometria hiperbólica" é feita mediante manipulação de objetos ostensivos, desenhados pelo aprendiz na tela do computador. O planejamento das atividades levou em consideração a dialética entre os objetos ostensivos, mostrados no monitor do computador, e os não ostensivos que seriam construídos durante o desenrolar do minicurso. Consideramos também que o recurso tecnológico utilizado na realização das tarefas, com o ato de "arrastar com o mouse" objetos ostensivos, facilitaria tal dialética.

No âmbito deste texto nos reportaremos às quatro últimas das 19 atividades. Nestas, o aluno já estava na fase final da construção e manipulação do modelo do plano de Poincaré. O leitor interessado na descrição detalhada da confecção, aplicação e análise dos registros coletados pode se reportar ao texto de Ferreira (2011), disponível no site www.pcm.uem.br.

Os alunos serão identificados mediante codinomes de A1 a A17.

Para as análises das respostas escritas pelos alunos, as ferramentas utilizadas foram a Análise de Conteúdo de Bardin (1977) e também a Análise de Conteúdo de Moraes (1999).

> uma metodologia de pesquisa usada para descrever e interpretar o conteúdo de toda classe de documentos e textos. Essa análise, conduzindo a descrições sistemáticas, qualitativas ou quantitativas, ajuda a reinterpretar as mensagens e a atingir uma compreensão de seus significados num nível que vai além de uma leitura comum (MORAES, 1999, p. 2).

Para resolver as atividades, os alunos fizeram uso das técnicas de “arrastar e observar” os ostensivos mostrados na tela. Esses atos já se tornaram comuns dentro da geração de estudantes nativos da interface *touchscreen* dos aparatos digitais utilizados hoje em dia. Trata-se de uma nova prática de manipulação de ostensivos que se iniciou nos anos 80 do século passado, quando foi lançado o primeiro *software* de manipulação geométrica. Mediante a utilização dessa técnica é que ocorre, nessa situação, a dialética entre os ostensivos e os não ostensivos.

Para Chevallard (1999, *apud* JÚNIOR; FREITAS, 2009), ao analisarmos a relação institucional do uso de técnicas na resolução de tarefas, devemos considerar o tempo como variável primordial, no seguinte sentido. “Para se determinar uma relação institucional precisamos recorrer a uma praxeologia, e o acesso a essas relações pode ser feito pela observação dos seus diferentes momentos ou ainda, do contexto em que a mesma foi concebida” (JÚNIOR; FREITAS, 2009, p. 5).

Sendo assim, podemos considerar que a técnica de “arrastar e observar” já se torna uma praxeologia para a resolução de tarefas de geometria com uso de modelos geométricos.

Descrição e análise das atividades

No primeiro dia do minicurso, com 4h de duração, foram aplicadas atividades de reconhecimento e familiarização do ambiente do GeoGebra. O objetivo disso foi evitar que alunos que nunca haviam utilizado o *software* tivessem dificuldades inerentes à manipulação de suas ferramentas. Resumidamente, foram propostas atividades básicas como a de criação de pontos, retas e circunferências e as de manipulação desses ostensivos dentro do contexto da geometria euclidiana.

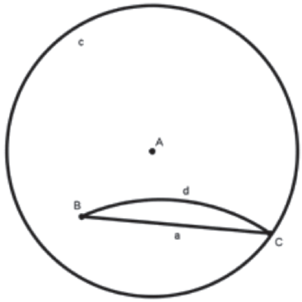
No segundo dia, também com duração de 4h, foram aplicadas atividades que levaram à construção de representação de um espaço no qual era válida a métrica do taxista, ou seja, métrica definida por. As tarefas aplicadas nesse dia visavam à construção de não ostensivos relacionados às propriedades básicas de uma métrica e também pretendiam propor tarefas nas quais a dialética entre ostensivos e não ostensivos permitisse manipular novos objetos ostensivos que respeitariam propriedades da métrica euclidiana.

Nos encontros do terceiro e do quarto dia, ambos com 4h de duração, foram aplicadas atividades que levaram os alunos a construir representações de espaços com outras métricas, como, por exemplo, a do plano de Poincaré. A ênfase das tarefas desses dias estava na proposição de manipulações de objetos ostensivos para que surgissem não ostensivos relativos às propriedades de espaços hiperbólicos.

As atividades 16, 17, 18 e 19, analisadas a seguir, foram realizadas no quinto encontro, também com duração de 4h.

Atividade 16: objetivava criar um espaço no qual os alunos eram convidados a investigar a diferença entre a distância euclidiana e a distância hiperbólica. A distância euclidiana foi denotada por “d” e era o número associado ao objeto ostensivo que representava o segmento de reta euclidiano. A distância hiperbólica foi denotada por distBC e era o número associado ao objeto ostensivo que representava o segmento de reta hiperbólico, aparentemente curvo, já que as retas hiperbólicas do plano de Poincaré são arcos de circunferências que interceptam perpendicularmente a circunferência ideal que “limita” a representação do plano de Poincaré. Essas medidas eram mostradas na coluna algébrica, situada ao lado da janela de desenho. A janela de desenho, obtida na construção da atividade 16, assemelhava-se com a imagem mostrada na Figura 1: nessa atividade, foram propostas sete questões aos alunos. A categorização das respostas está a seguir.

Figura 1: Plano de Poincaré



Fonte: Autores

Categorias detectadas na resposta da questão 16.1: Se fosse possível continuar utilizando a ferramenta "Ampliar", as distâncias "d" e "distBC" ficariam iguais? Por quê?

> Sim, basta ampliarmos a circunferência. Alunos: A2, A3, A8, A13, A15, A16 e A17.
> Não, uma diminui e a outra aumenta. Alunos: A6, A9, A12 e A14.
> Não, mas ambas diminuem. Alunos A5 e A7.

Inferências da questão 16.1: na primeira categoria detectamos a possibilidade de construções e manipulações adequadas de não ostensivos. Mas também percebemos que, se a configuração de casas decimais não fosse aumentada para cinco casas, os alunos veriam ostensivos na coluna algébrica que os levariam a generalizações abusivas (ALMOULOUD, 2007). As afirmações de A15 e A17 mostram a compreensão do processo de limite, eles perceberam que o arco de circunferência se aproximava de um segmento de reta.

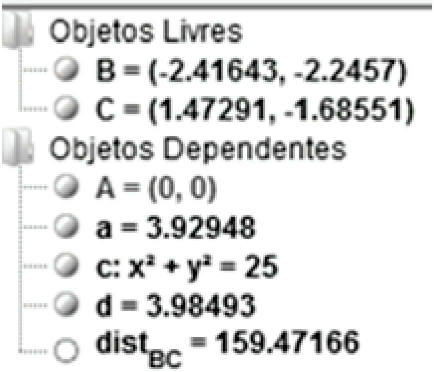
Categorias da questão 16.2: Você percebe mudanças em seu desenho? Todos os alunos responderam que nada mudou.

Inferências da questão 16.2: realmente é isso o que vemos na área de desenho. Depois das aproximações, a magnitude do segmento hiperbólico é tão pequena que, quando construímos o segmento euclidiano que liga B a C, a representação mostrada na tela (ostensivo) fica coincidente com a representação do h-segmento hiperbólico. Por isso a unanimidade das respostas.

Categorias da questão 16.3: Você observa algum campo novo na coluna algébrica?

A esta questão todos os alunos também deram a mesma resposta, sim, que é criado na coluna algébrica o campo “a”, referente à construção do segmento euclidiano, conforme a Figura 2:

Figura 2: Janela de álgebra



Fonte: *Software* GeoGebra

Inferências da questão 16.3: esta questão permite inferir que os alunos já manuseavam adequadamente os ostensivos exibidos nas duas áreas mostradas na tela.

Categorias da questão 16.4: Os segmentos hiperbólico e euclidiano são coincidentes? Explique.

> Não quando estão distantes, e sim quando estão próximo. Alunos: A2, A13, A16 e A17.
> Não, por causa da ferramenta criada para traçar o segmento hiperbólico. Alunos: A3 e A7.
> Sim, possuem a mesma distância. Alunos: A5, A6.

> São. O hiperbólico d = 0,00715 e a = 0,00715, eles possuem a mesma distância. Alunos: A9, A12, A14.
> Não, porém quanto mais próximo os pontos, mais próximos estarão os segmentos. Alunos: A8, A15.

Inferências da questão 16.4: a primeira categoria permite inferir que já existe a compreensão do que seja a representação de segmentos hiperbólicos. Dos fragmentos escritos por A3 e A7, inferimos que eles compreenderam bem as construções e representações. Quando dizem que as representações nunca serão iguais, estão certos, apesar de os ostensivos mostrados na área de desenho serem coincidentes e os ostensivos mostrados na coluna algébrica serem numericamente iguais pelo arredondamento do *software*, os não ostensivos (conceitos de segmento euclidiano e conceito de h-segmento) associados permanecem distintos.

Categorias da questão 16.5: Você percebe linhas de traçados diferentes entre B e C? Por que elas apareceram? Quais as diferenças entre elas?

Quase todos os alunos responderam que sim, de maneira geral, ou disseram que uma era uma “reta” e outra, uma “hipérbole” ou que uma é euclidiana e a outra é hiperbólica.

Inferências da questão 16.5: destacamos os alunos A5, A6, A9, A12 e A14. Eles haviam se equivocado na questão anterior. Mas, ao vermos as respostas a esse item, inferimos que começaram a perceber a distinção entre os não ostensivos associados a ostensivos iguais. Estes alunos observam na tela desenhos coincidentes, porém ressaltam distintos objetos geométricos.

Categorias da questão 16.6: Observe os campos “d” e “distBC”. O que está ocorrendo?

> Se um dos pontos se aproximarem da circunferência distBC tende para o infinito. Alunos: A2, A13 e A16.

> Quando C se aproxima de B a distância hiperbólica se aproxima da distância euclidiana. Alunos: A3, A9, A6, A7, A12 e A14.
> Quando "d" diminui a "dist_BC" aumenta. Alunos: A5 e A17.
> Conforme B se afasta de C as distâncias aumentam. Sendo que a hiperbólica aumenta mais que a euclidiana. Alunos: A8 e A15.

Inferências da questão 16.6: na primeira categoria, os alunos expressaram o que acontece quando B ou C pertencem à circunferência. Inferimos que esses três alunos, naquela ocasião, utilizaram e aperfeiçoaram os não ostensivos associados à tendência ao infinito. Os cinco alunos cujos fragmentos estão na segunda categoria mostram que houve um bom "diálogo" entre os ostensivos e não ostensivos, pois, localmente, o plano hiperbólico comporta-se como plano euclidiano. Já A8 e A15 relatam exatamente a diferença existente entre o plano euclidiano e o plano hiperbólico – o comportamento local semelhante será tão melhor quanto menor for a magnitude das distâncias entre os pontos analisados.

Categorias da questão 16.7: Mova B e o aproxime da circunferência "c", o que está ocorrendo com as linhas entre B e C? O que está ocorrendo com os campos "d" e "distBC"? Salve o arquivo.

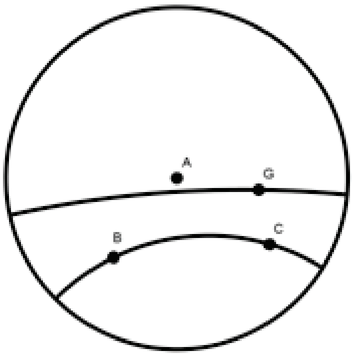
Nesse item pedimos explicitamente para que os alunos aproximassem os pontos do traço da circunferência limite e relatassem a investigação.

> As linhas se aproximam de uma semi circunferência. Alunos: A2, A13, e A16.
> As linhas vão se distanciando. As distâncias nos campos "d" é "distBC" estão ficando cada vez mais distantes. Alunos: A3, A4, A8, A15 e A17.
> Curva se aproxima de uma reta. Alunos: A6, A7, A9, A12 e A14.

Inferências da questão 16.7: os alunos A2, A13 e A16 relataram o que ocorre com os ostensivos no plano euclidiano, mas no plano hiperbólico eles continuarão sendo h-segmentos de reta. Os fragmentos emitidos por esses alunos exemplificaram a construção da dialética entre o ostensivo e o não ostensivo. Pelos fragmentos da segunda categoria, inferimos que, nas explorações daqueles alunos, os pontos B e C aproximaram-se da circunferência. Por isso as medidas dos segmentos aumentam e a medida do h-segmento tende a infinito. Os fragmentos da terceira categoria nos levam a inferir que a posição dos pontos B e C levou os alunos a escreverem suas respostas.

Atividade 17. Nessa atividade, os alunos já haviam construído uma ferramenta denominada de H-reta, que traçava a reta hiperbólica por dois pontos marcados. A tarefa principal era utilizar a ferramenta H-reta e investigar a incidência de retas hiperbólicas que passariam por um ponto não pertencente a uma h-reta dada. A construção feita na atividade se assemelha à Figura 3:

Figura 3: H-retas paralelas



Fonte: Autores

Categorias da questão 17.1: Quantas são as posições nas quais ela não intercepta a H-reta por B e C?

Duas posições. Aluno: A6.

> Infinitas posições. Alunos: Os demais, com exceção de A6 que respondeu duas posições.

Inferências da questão 17.1: a maioria dos alunos está correta e inferimos que a técnica de "arrastar e observar" foi importante na conclusão emitida por eles. Ou seja, houve a "dialética do policiamento ostensivo e não ostensivo" que permitiu a confecção de respostas corretas.

Categorias da questão 17.2: Enuncie, com suas palavras, essa propriedade. A resposta desejada era: Há infinitas retas hiperbólicas que não interceptam a reta hiperbólica dada.

> Definição de métrica. Alunos: A2, A3, A5, A13, A7, A8, A15 e A17.
> Primeiro: distância (B,B) = 0. Segundo: não existe distância negativa. Terceiro: distância (B,C) = distância (C,B). Quarto: distância BF = distância (B,C) + distância (C,F). Alunos: A6, A10, A12, A14.

Inferências da questão 17.2: os fragmentos da primeira categoria nos permitem inferir que os alunos compreendem a representação do plano de Poincaré e conseguem enunciar, com as palavras deles, o quinto postulado para geometria hiperbólica, mesmo sem saber que ele existe. Detectamos mais uma vez manifestações da "dialética do policiamento ostensivo e não ostensivo".

Categorias da questão 17.3: Se você considerar o plano euclidiano, dados uma reta r e um ponto P fora dela, quantas retas podem ser traçadas por P que não interceptam r? Qual a diferença entre essa situação encontrada na geometria euclidiana e a situação encontrada na geometria hiperbólica?

> Apenas uma reta paralela, tanto na Geometria Euclidiana quanto na Geometria Hiperbólica.

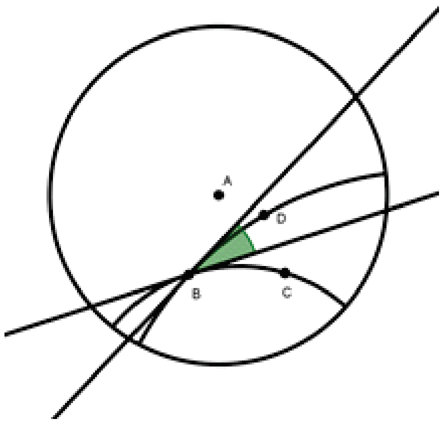
Alunos: A2, A5 e A13.

Apenas uma reta paralela na Geometria Euclidiana, enquanto na Geometria hiperbólica são infinitas retas. Alunos: A3, A6, A7, A8, A10, A14, A12, A15 e A17.

Inferências da questão 17.3: na primeira categoria deste item, os alunos A2, A5 e A13 proferiram respostas dignas dos matemáticos reticentes em admitir que seja válida a negação do quinto postulado de Euclides. Inferimos que, enquanto não era solicitada a comparação entre os resultados explorados no modelo de Poincaré e os da geometria euclidiana, os não ostensivos associados à exploração da atividade 17 podiam ser enunciados sem restrições.

Atividade 18. Nessa atividade, os alunos foram instruídos a construir mecanismos para a medição de um dos ângulos formados pela interseção de retas hiperbólicas. Vejamos a Figura 4 que ilustra a construção da atividade.

Figura 4: Ângulo hiperbólico



Fonte: Construção no GeoGebra

Categorias da questão 18.1: O que ocorre com a medida angular quando B se aproxima do círculo limite “c”?

> Aumenta. Alunos: A2, A5, A6 A9, A13, A12 e A14.
> Aproxima-se de 1800. Alunos: A3 e A7.
> Tende a zero. Alunos: A8, A15 e A17.

Inferências da questão 18.1: quando B se aproxima do círculo limite, as retas tangentes tendem a coincidir e, portanto, o ostensivo mostrado na área de desenho pode indicar uma tendência a atingir 180° ou a atingir 0°, depende da maneira com que se desloca o ponto B e também da ordem em que eles escolheram as retas. Todos os alunos verificaram corretamente a tendência. O que inferimos dessas respostas é que o trabalho com a técnica “arrastar e observar” ainda se restringe a uma investigação não sistemática.

Categorias da questão 18.2: O que ocorre com a medida angular quando B se aproxima de A?

> Diminui. Alunos: A2, A5, A13, A6, A9, A12 e A14.
> Depende da localização, aumenta ou diminui. Alunos: A3 e A7.
> Tende ao ângulo raso. Alunos: A8, A15 e A17.

Inferências da questão 18.2: todas as categorias exibem respostas compatíveis com a representação do plano de Poincaré e ao trabalho com os ostensivos mostrados na tela.

Categorias da questão 18.3: Quando B coincide com A, o que ocorre com as H-retas e as tangentes?

> Ficam coincidentes. Alunos: A2, A5, A3, A8, A13, A15 e A17.
> Os valores ficam indefinidos. Alunos: A6, A9, A7, A12 e A14.

Inferências da questão 18.3: na primeira categoria os alunos fizeram observações baseados nos objetos ostensivos, ou seja, no que eles viam na tela do GeoGebra. Inferimos que eles ainda não compreenderam que, quando o vértice do ângulo situa-se em A, o centro da representação, a "curvatura" do universo, ocasionada pela métrica não euclidiana, não influencia a medida angular. Na segunda categoria, os alunos conseguiram posicionar o ponto B, sobre o centro A de tal forma que o *software* arredondou as coordenadas de B, para (0, 0), obtendo, assim, o ostensivo "indefinido na coluna algébrica".

Atividade 19. A construção dessa atividade objetivava a exploração acerca da soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico, desenhado no plano de Poincaré.

Categorias da questão 19.1: A soma das medidas é igual a 180°?

> Sim. Alunos: A2, A5, A13.
> Não. Alunos: A6, A8, A9, A12, A14, A7, A15 e A17.

Inferências da questão 19.1: provavelmente os alunos A2, A5 e A13 deixaram-se influenciar pelo objeto não ostensivo e pela definição da soma dos ângulos interno de um triângulo na geometria euclidiana. Inferimos que houve manifestação de obstáculo ligado à concepção do universo euclidiano. Os demais alunos perceberam o que acontece com a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico no plano de Poincaré. Inferimos que eles já conseguem separar a representação da geometria da própria geometria e que ultrapassaram obstáculos que se manifestaram no século XIX, quando do aparecimento da geometria hiperbólica.

Categorias da questão 19.2: Quando é que a soma se aproxima mais de 180º?

> Não é possível. Alunos: A2, A5 e A13.
> Quando os vértices se aproximam. Alunos: A6, A7, A8, A9, A10, A14, A15, A17.

Inferências da questão 19.2: pelas respostas da segunda categoria, inferimos que esses alunos compreenderam a representação do plano de Poincaré – a dialética entre os ostensivos e os não ostensivos se realizava satisfatoriamente.

Categorias da questão 19.3: Quando é que a soma se afasta mais de 180°?

> Não é possível. Alunos: A2, A5, A13.
> Quando os três pontos se aproximam da circunferência C. Alunos: A6, A7, A8, A9, A10, A14, A15 e A17.

Inferências da questão 19.3: os alunos A2, A5 e A13 não conseguiram responder a esse item. Os demais aplicaram a técnica de trabalho e observaram adequadamente os ostensivos.

Categorias da questão 19.4: Enuncie com suas palavras um "teorema" que expresse sua conclusão quanto à soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo na geometria hiperbólica.

> Igual da Geometria Euclidiana. Alunos: A2, A5, A13.
> É diferente de 180º. Alunos: A9, A10 e A14.
> Respostas sem sentido. Alunos: Os demais.

Inferências da questão 19.4: os alunos A2, A5 e A13, que em atividades anteriores estavam resolvendo adequadamente as tarefas, sofreram com uma construção mal realizada. Os demais alunos conseguiram utilizar as técnicas desenvolvidas e à sua maneira disseram que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é inferior a 180° graus e que a diferença entre a medida e 180° graus é proporcional à área do triângulo.

Considerações finais: implicações para o ensino de matemática

Nessas atividades, percebemos obstáculos advindos da linguagem, do domínio de interpretação e também do uso de *softwares* de geometria dinâmica. Mesmo com a facilidade de investigação de situações geométricas, ocorreram obstáculos didáticos, advindos do não cumprimento de instruções e também por características intrínsecas do *software*, como os arredondamentos de medidas. Influências como essas devem ser consideradas e momentos de consolidação das técnicas devem ser planejados para que os alunos não construam conceitos (não ostensivos) equivocados. Detectamos que mais atividades que explorem a influência desses fatores devem ser apresentadas para que a técnica do “arrastar e observar” seja corretamente aplicada na resolução de tarefas de investigação.

Detectamos também que a manipulação de objetos ostensivos num *software* pode dificultar a construção de objetos não ostensivos, relativos à geometria hiperbólica, casos registrados nas inferências de 16.1 e 19.1. Mas, de maneira geral, tal manipulação traz mais facilidade para a construção de objetos não ostensivos, os casos estão registrados nas inferências das questões 16.7, 18.1 e 19.2.

Concluímos também que a técnica “arrastar e observar” permitiu um diálogo mais fluente entre objetos ostensivos e não ostensivos, como já foi observado nas inferências das questões 16.1, 16.2 e 19.3. Nessas atividades, os alunos constataram, por meio da visualização, as propriedades que levam à compreensão de infinitude de um espaço, mesmo que sua representação seja limitada. Neste caso, o modelo do plano de Poincaré é um disco limitado que representa um plano infinito. Esse resultado da aplicação das tarefas ilustra o que diz Bosch (2000), pois a manipulação de ostensivos de duas “espécies”, figuras na área de desenho e números na coluna algébrica, permitiu a construção de conceitos relacionados à infinitude, mesmo com ostensivos relacionados a situações limitadas.

Detectamos, ainda, que o uso de instrumentos digitais para simulação de situações geométricas facilita a aprendizagem dos conceitos envolvidos. A simulação se fez pelo uso intensivo da técnica do “arrastar e observar”, sendo facilitadora para compreensão dos conteúdos envolvidos, como podemos ver nas respostas 16.4, 16.5, 16.6 e 17.1. Mas tal técnica também ocasionou obstáculos didáticos, tais episódios foram verificados em: 16.1 e 16.7.

Ainda com respeito às dificuldades, podemos dizer que os alunos se deparam com dificuldades semelhantes às enfrentadas por Saccheri. Ele, em sua proposição XXXIII: “a hipótese de ambos os ângulos serem agudos é falsa, pois repugna a natureza da reta” (BONOLA, 1911, p. 43), manifestou um obstáculo advindo do conhecimento euclidiano, mais especificamente da representação de não ostensivos euclidianos.

Finalmente, podemos afirmar que é possível ensinar a geometria hiperbólica, ou outra geometria não euclidiana, desde que seja de forma organizada, respeitando os limites dos aprendizes. Podemos assegurar ainda que a definição formal de métrica é decisiva para a destruição dos amálgamas Infinito/Ilimitado e Finito/Limitado. Esperamos que esta pesquisa sirva de referência não só para trabalhos acadêmicos, mas sim para as salas de aulas do ensino médio e de formação de professores.

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática.** Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo.** Lisboa, Portugal: Edições 70, 1997.

BONOLA, Roberto. **Non-Euclidean Geometry**: a critical and historical study of its development. Chicago: The Open Court Publish Company. Reprint by www.forgottenbooks.org., 1911.

BOSCH, Marianna. **Un punto de vista Antropológico**: la evolución de los “instrumentos de representación” en la actividad Matemática. IV Simpósio SEIEMIV (Huelva 2000). Ponencia invitada al Seminário de Investigación I, “Representación y comprensión”, 2000.

CHEVALLARD, Yves. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Disponível em: http://www.uaq.mx/matematicas/redm /art/a1005.pdf. Acesso em: 15 jun. 2009.

FERREIRA, Luciano. **Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica**: “construção do Plano de Poincaré” com o uso do software GeoGebra. 293f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2011.

JUNIOR, Dejahyr Lopes; FREITAS, José Luiz Magalhães de. Um estudo sobre prática pedagógica de professores de matemática: Uma tentativa de articulação entre a TAD e os conceitos habitus e campo Bourdieu. **Anais da 32ª Reunião anual da ANPED**. Caxambú, 4 a 7 de outubro de 2009. Disponível em: www.anped.org.br/ reunioes/32ra/index.html. Acesso em: 20 jun. 2016.

MORAES, Roque. Análise de conteúdo. **Revista Educação**, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

PAIS, Luis Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.** Curitiba, 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009 /matematic a.pdf. Acesso em: 20 jul. 2010.

Capítulo 10

Sequências e padrões: uma discussão a partir de produções de significado

Sérgio Carrazedo Dantas

Introdução

Muitas pessoas, por certo, já tiveram contato com enunciados de questões que propõem que seja calculado o próximo termo de uma sequência, considerando alguns termos iniciais. Um exemplo desse tipo de questão é:

> Qual é o próximo número da sequência abaixo?
> 3, 8, 18, 33, ___

Eu me permiti resolver "um problema" que constituí a partir desse enunciado. O problema que resolvi foi o seguinte: "Tenho 4 números. Falta um aqui. Qual é? Encontre um número e justifique sua escolha".

Na minha resolução, o próximo termo é 46, pois esse termo, juntamente com os apresentados no enunciado, possibilita escrever a seguinte função polinomial.

$$p(x) = (x - 3).(x - 8).(x - 18).(x - 33).(x - 46)$$

Os valores 3, 8, 18, 33 e 46 correspondem às raízes de p(x) = 0. Embora o termo 46 tenha sido escolhido arbitrariamente, com ele foi possível compor uma equação matemática pela qual posso calcular um conjunto de valores que, quando ordenados, podem ser descritos como uma sequência cujo quinto termo é 46. O valor responde a questão proposta no enunciado.

Além dessa possibilidade de solução, o enunciado é aberto a outras possibilidades. Por exemplo, eu posso supor que há certo padrão de formação entre os termos da sequência. Minha análise centraria o foco na paridade da soma dos valores absolutos dos algarismos de cada número.

Tabela 1: Análise da sequência por meio da adição dos algarismos dos termos

Ordem	Termo	Soma dos valores absolutos dos algarismos	Paridade da soma
1º	3	3	ímpar
2º	8	8	par
3º	18	1 + 8 = 9	ímpar
4º	33	3 + 3 = 6	par

Fonte: O autor

Suponho que a soma dos valores absolutos dos algarismos do próximo termo deve ser ímpar, e escolho 34 como o próximo termo. Mas, segundo essa análise, nada impediria que o quinto termo fosse 36, 38, 41, entre outros números.

Desse modo, o enunciado permite não apenas uma, mas outras tantas formas de solução, pois não possui elementos para que questões como as apresentadas abaixo sejam respondidas.

- Espera-se que o leitor suponha a existência de algum padrão ou regularidade porque a palavra sequência está presente no enunciado[1]?
- O próximo termo deve ser natural, racional, real ou complexo?
- Os termos da sequência devem conservar alguma relação aritmética comum?

[1] Se essa questão lhe parecer estranha, sugiro que pense na sequência formada pelos algarismos da parte decimal de π, uma sequência infinita que não pode ser descrita por uma expressão algébrica.

Os enunciados apresentados anteriormente e as argumentações desenvolvidas a partir dos mesmos me ajudam a tematizar uma perspectiva de trabalho em sala de aula de matemática a partir da proposição de problemas. Centro o foco de análise na comunicação, na interação entre os agentes envolvidos (alunos e professor) e nas produções de significados ocorridas neste processo. Para isso, apresento trechos de diálogos entre um professor de Matemática do Ensino Médio, chamado por mim de João, e seus alunos. Os diálogos, organizados em episódios, retratam momentos em que a atividade dos alunos estava centrada na resolução de problemas constituídos a partir de enunciados propostos pelo professor.

A escolha desses enunciados visava que os alunos desenvolvessem a percepção de padrões e de regularidades por meio de um trabalho com sequências.

É importante ressaltar duas escolhas quanto ao método de trabalho do professor João: a divisão dos alunos em pequenos grupos e o diálogo promovido a partir da resolução dos enunciados propostos.

A escolha em dividir os alunos em grupos de cinco ou seis estudantes permitiu que os mesmos resolvessem de forma conjunta e colaborativa os problemas constituídos no interior dos grupos e, além disso, que o atendimento do professor fosse direcionado ao grupo e não a alunos individualmente, fomentando o debate sobre a resolução dos problemas entre eles.

A segunda escolha diz respeito a explorar os tópicos de estudo a partir de um trabalho previamente realizado pelos estudantes. Na dinâmica escolhida, o professor apresentava um enunciado para os grupos que, em seguida, passavam a se comunicar internamente, ou seja, os membros do grupo dialogavam entre si enquanto trocavam esboços, compartilhavam hipóteses e registros. E, em momentos pontuais, eram atendidos pelo professor que circulava entre os grupos formados em volta de carteiras agrupadas. As intervenções do professor também ocorriam sem que os alunos o chamassem ou fizessem alguma pergunta em voz alta durante a resolução dos problemas.

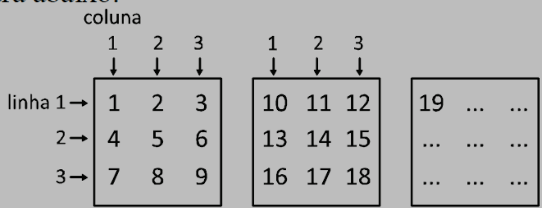
A partir do cenário descrito, lanço um olhar e apresento uma argumentação sobre uma leitura da interação entre os sujeitos envolvidos nas aulas de Matemática promovidas pelo professor João.

Episódio 1

O primeiro enunciado proposto pelo professor aos seus alunos tinha o seguinte texto:

Figura 1: Enunciado 1

Os números inteiros positivos são dispostos em "quadrados" conforme mostra a figura abaixo.



Seguindo esse padrão, o número 500 será exibido em um desses quadrados. Qual é o número da linha e da coluna que o número 500 se encontrará?

Fonte: Adaptada pelo professor com basena prova da Fuvest-1991

O diálogo, a seguir, aconteceu durante a fase em que o professor atendia aos alunos nos grupos de trabalho. Após um intervalo de tempo dedicado à resolução do primeiro problema, o professor se aproximou de um grupo e perguntou:

> PROFESSOR: Como devemos iniciar a resolução do problema proposto pelo enunciado?
> MARCOS: Professor, observamos que cada quadrado possui nove números. Pensamos em dividir 500 por 9.
> PROFESSOR: E o que faremos com os valores

> obtidos neste cálculo?
> ALICE: O quociente vai indicar a quantidade de quadrados que serão necessários.
> MARCOS: E o que faremos com o resto da divisão? Eu dividi 500 por 9; deu 55 e sobrou 5.
> PEDRO: Vamos precisar de 55 quadrados.
> PROFESSOR: Será que 55 quadrados serão suficientes?
> TATIANE: 55 quadrados completos e um quadrado com 5 números. Então será 1 quadrado a mais que o resultado da divisão [quociente].
> ALICE: É no quadrado 56 que devemos ter atenção, pois o 500 será o quinto número deste quadrado.
> PROFESSOR: Como os números são distribuídos em um quadrado?
> MARCOS: Começa pela linha mais em cima e, depois, as debaixo.
> ALICE: É Marcos, daí o número 500 ficará na 2ª linha e na segunda coluna.
> PROFESSOR: Então, qual é o processo geral para encontrar a posição de um número qualquer?
> MARCOS: Divide primeiramente o número por 9. Pegue o resto e divida por 3. O quociente mais 1 será o número da linha e o resto o número da coluna.

Neste trecho do diálogo, os alunos, juntamente com o professor, encontraram um modo de realizar os cálculos, um algoritmo que possibilita encontrar a posição de um número não múltiplo de 9 em um quadrado[2].

[2] Quando o número for maior que 0 e múltiplo de 9 sua posição será a terceira linha e a terceira coluna de um quadrado.

A resolução desse problema demanda apenas operações aritméticas, e são a respeito dessas operações que as falas dos alunos se concentram. Em uma de suas intervenções, o professor pergunta sobre um método geral para encontrar a linha e a coluna de um número qualquer, um acréscimo ao que é proposto no enunciado com o objetivo de levar os alunos a perceberem que o processo que estavam discutindo poderia ser aplicado a outro número. Considero legítimo afirmar que o professor argumentava sobre a possibilidade de um método genérico para resolução do problema, ou seja, um método que não dependia dos dados da questão, mas que se fundamente na estrutura do problema.

A escolha do enunciado, segundo o professor, levou em consideração uma questão que ele descreveu como fundamental: “Escolhi um enunciado cujo problema proposto permitia chegar a um algoritmo para a descrição da posição do número em um quadrado, mas que não fosse facilmente resumido em uma expressão matemática”.

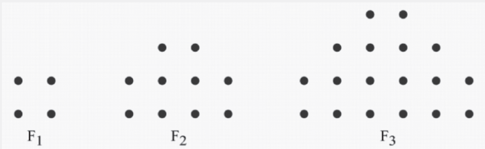
Ainda segundo ele, sua intenção era que os alunos descrevessem por meio da linguagem faladao método de cálculo, como aparece na argumentação de Marcos. João acrescentou que a linguagem simbólica deveria ser empregada na continuação do trabalho com sequências quando surgiria a necessidade de abreviação e de outra forma de escrita, em notação matemática, o que será contemplado mais à frente neste texto.

Episódio 2

No segundo enunciado proposto pelo professor, a ênfase do trabalho deixa de ser as operações aritméticas. O tratamento do problema exigia a análise de como uma figura era obtida a partir da anterior por meio de um processo recursivo.

Figura 2: Enunciado 2

A figura F_1 é representada por quatro pontos formando um quadrado. Para obtermos a figura F_2 marcamos mais seis pontos ao redor da figura F_1, formando quatro quadrados. A figura F_3 foi obtida marcando mais oito pontos ao redor da figura F_2, formando quadrados, e assim sucessivamente.



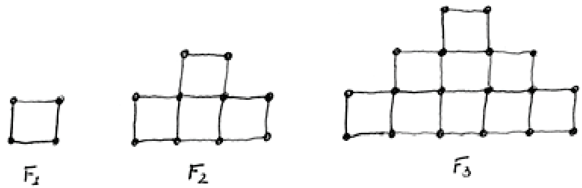
Continuando este processo e considerando-se quadrados formados por apenas quatro pontos, quantos quadrados terá a figura F_{16}?

Fonte: Adaptada pelo professor a partir da prova do vestibular da Unioeste

Segue uma síntese do diálogo ocorrido entre o professor e dois grupos de alunos no momento da resolução do problema.

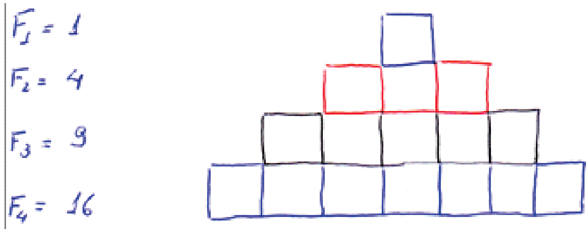
> FELIPE: Professor, nós começamos montando uma tabela e escrevendo os dados.
> PROFESSOR: Quais dados?
> FELIPE: A tabela tem o número da figura, a quantidade de pontos e a quantidade de quadrados. Assim.
>
> | figura | pontos | | quadrados | |
> |---|---|---|---|---|
> | 1 | 4 | +6 | 1 | +3 |
> | 2 | 10 | +8 | 4 | +5 |
> | 3 | 18 | | 9 | |
>
> Não sabemos como fazer para tirar a quantidade de quadrados da quantidade de pontos.
> PROFESSOR: Será que a quantidade de pontos ajuda a calcular a quantidade de quadrados?

Alunos que estavam em outro grupo, ao lado do grupo que o professor atendia, decidiram se manifestar. Pareciam provocados pela pergunta do professor.

> PEDRO: Professor, nós achamos que os pontos são importantes para construir os quadrados. Nós desenhamos os quadrados assim.
>
> 
>
>
> PROFESSOR: Fazendo isso vocês conseguem perceber algum padrão?
> DEMÉTRIO: Nós conseguimos perceber que F1 tem 1 quadrado, F2 tem 4 quadrados e F3 tem 9 quadrados. Fizemos mais uma, a F4 e ela tem 16 quadrados. Devemos continuar desenhando as outras figuras?
> PROFESSOR: Como os novos desenhos ajudariam vocês chegarem na quantidade de quadrados da figura 16?
> DEMÉTRIO: Nós contamos os quadrados de cada uma delas.
> MARCOS: Demétrio não dá para fazer isso! A ideia é descobrir como as figuras crescem.
> PROFESSOR: Que tal vocês desenharem os quadrados com cores diferentes em uma mesma figura? Assim, daria para ver as três figuras a partir de uma e tentar observar como varia a quantidade de quadrados.

Os alunos pediram que o professor explicasse com mais detalhes a proposta que acabara de fazer. Ele pediu aos alunos canetas de cores diferentes e desenhou um quadrado com a caneta azul, a partir dos pontos da figura 1. Em seguida, desenhou a partir do quadrado azul mais três quadrados com a caneta vermelha para obter a figura 2. Os alunos demonstraram compreender a ideia do professor e continuaram a construção. O professor se afastou do grupo para conversar com outro grupo sobre como estavam realizando aresolução do problema.

Após alguns minutos, tendo acabado de desenhar as figuras, os alunos chamaram o professor novamente. Mostrando a figura Marcos perguntou:

> MARCOS: Essa é a figura que construímos.
>
> 
>
>
> Qual conta a gente tem que fazer para calcular a quantidade de quadrados da figura 16?
> PROFESSOR: Será que não dá para escrever a quantidade de quadrados de cada etapa da construção de vocês de outra forma? [Silêncio por alguns segundos].
> MARCOS: Sim! Por meio de uma adição.

O professor se afastou do grupo, pois a empolgação de Marcos era suficiente para ele compreender que o problema estava praticamente solucionado. Enquanto isso Marcos se voltou aos demais colegas do grupo e passou a argumentar que uma nova figura seria formada por uma quantidade de quadrados que são adicionados em uma figura anterior. Assim,

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = F_1 + 3 = 1 + 3$$
$$F_3 = F_2 + 5 = 1 + 3 + 5$$

Logo, os alunos perceberam que F_{16} seria a soma de 16 quantidades representadas por números ímpares, ou seja, $F_{16} = 1 + 3 + 5 + ... + 27 + 29 + 31$ e, concluíram, a figura 16 seria composta por 256 quadrados.

O professor retornou ao grupo de alunos ao qual havia perguntado sobre como relacionar a quantidade de pontos com a quantidade de quadrados. O grupo havia abandonado aquela ideia inicial. Parecia que a pergunta do professor (Será que a quantidade de pontos ajuda a calcular a quantidade de quadrados?) ressoara como uma reprovação ao que estavam fazendo. Na minha leitura é como se os alunos tivessem ouvido o professor dizer: A quantidade de pontos não vai ajudar em nada no cálculo de quadrados de F_{16}.

Ao se aproximar do grupo, o professor perguntou.

> PROFESSOR: Conseguiram obter algo relacionando o número da figura com a quantidade de quadrados?
> FELIPE: Não professor. Nós desconsideramos o número de pontos e olhamos apenas para o número da figura e para a quantidade de quadrados que podiam ser desenhados. Fazendo uma conta de subtrair percebemos que a diferença de quadrados de uma figura para outra é sempre um número ímpar.
> PROFESSOR: Mas apenas três figuras não é um número pequeno de casos?
> FELIPE: O problema diz que o processo continua. Então, a Aline fez mais duas figuras.
> PROFESSOR: Em que isso ajudou?
> ALINE: Nós acrescentamos mais duas linhas na

tabela. Daí o Rodolfo disse para pensarmos de forma inversa. Ele escreveu a quantidade de quadrados como adição de números ímpares.

figura	quadrados		
1	1		$F_1 = 1$
2	4	$4 - 1 = 3$	$F_2 = 1 + 3$
3	9	$9 - 4 = 5$	$F_3 = 1 + 3 + 5$
4	16	$16 - 9 = 7$	$F_4 = 1 + 3 + 5 + 7$
5	25	$25 - 16 = 9$	$F_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

Os dois grupos abordaram o problema de formas diferentes. O primeiro percebeu o padrão de crescimento da quantidade de quadrados observando um padrão em uma construção geométrica. O outro grupo continuou lidando com quantidades e operações aritméticas conforme foi abordado no episódio anterior. Nas resoluções exploradas, o professor não conduziu as discussões para a obtenção de uma expressão que permitisse calcular a quantidade de quadrados de uma figura de ordem n. O processo realizado pelos dois grupos resolve os problemas constituídos por eles a partir da leitura que fazem do enunciado e, nesses problemas, não há a necessidade de construir uma expressão geral.

Em ambos os casos, na comunicação desenvolvida, o professor dialogava com os alunos a partir de suas afirmações e questões. Por meio de suas intervenções, ele buscava engajar os alunos em atividades nas quais estivessem presente a ação conjunta e a possibilidade de enunciações em diferentes direções, utilizando diferentes argumentos. Em outras palavras, o foco da abordagem do professor não estava no conteúdo, mas no sujeito e naquilo que o sujeito podia falar a partir de sua compreensão para um enunciado.

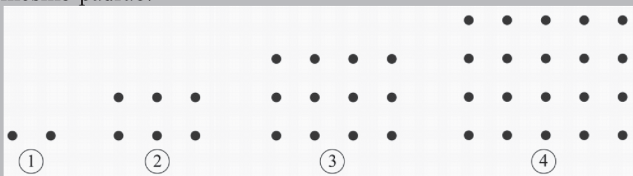
Episódio 3

Em outra aula, após os alunos se organizarem nos grupos fixos que haviam constituído na aula anterior, o professor distribuiu uma ficha de trabalho com a tarefa.

No enunciado era proposto encontrar uma fórmula ou uma sentença matemática que possibilitasse calcular a quantidade de pontos de uma figura de ordem n da sequência construída a partir de certo padrão.

Figura 3: Enunciado 3

Cada uma das quatro figuras abaixo, iniciando pela de número 1, faz parte de uma sequência de figuras que foi construída obedecendo um mesmo padrão.



Imagine que se continue compondo novas figuras, pela mesma lei de formação. É possível estabelecer uma fórmula, uma sentença matemática, que permita calcular a quantidade de pontos de uma figura da sequência. Encontre uma fórmula e descreva o processo utilizado no grupo na construção da mesma.

Fonte: Elaborada pelo professor

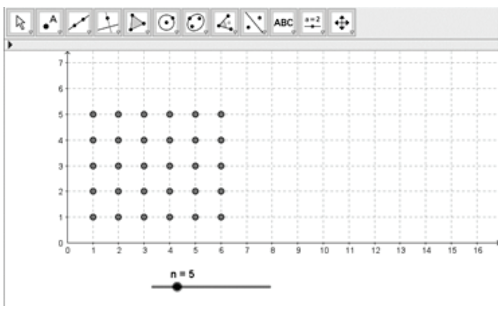
Após a leitura do enunciado e de uma breve discussão, um dos grupos chamou o professor por meio de um integrante que falava em nome de todos.

> ANDRÉ: Professor, nós começamos contando a quantidade de pontos de cada figura e pensamos em montar uma tabela com duas colunas. Uma com o número da figura e outra com a quantidade de pontos.
>
> PROFESSOR: E depois, o que pretendem fazer com esses números?

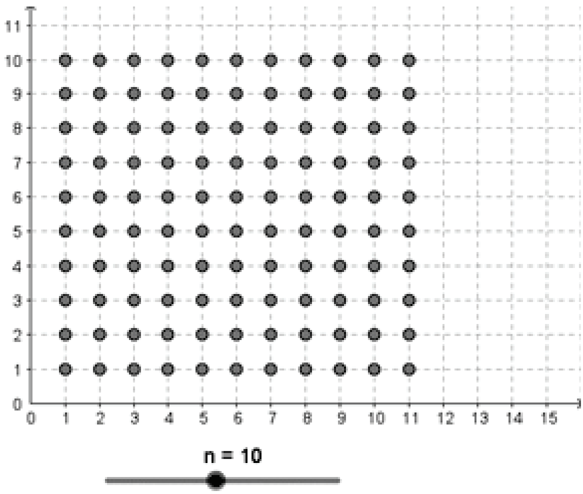
JÚLIA: Vamos tentar perceber algum padrão de crescimento dos valores da tabela, mas ainda não conseguimos perceber isso...
PROFESSOR: A sequência de figuras vai ajudar como nessa análise?
JÚLIA: Não sei... Talvez... Ela já ajudou! Deu para contar a quantidade de pontos de cada figura.
PROFESSOR: Eu penso que ela pode ajudar mais. Vou mostrar para vocês figuras dessa sequência utilizando o GeoGebra.

Durante seus momentos de preparação de aula, o professor havia construído um arquivo no *software* GeoGebra com o qual era possível visualizar cada uma das figuras sem que elas estivessem na sequência conforme exibido no enunciado. Por meio de um controle numérico visual denominado no *software* de controle deslizante era possível escolher um número de 1 a 20. A partir dessa escolha e de um processo de construção embutido e ocultado no *software* era exibida uma figura da sequência.O professor pediu que todos os grupos ficassem atentos à projeção da tela de seu computador em uma parede da sala de aula.

PROFESSOR: Construí esse arquivo para ajudar no nosso trabalho com esse problema. À medida que eu escolho um valor para o controle n é construída uma figura da sequência de figuras do enunciado que estamos trabalhando. Vejam para n = 5.



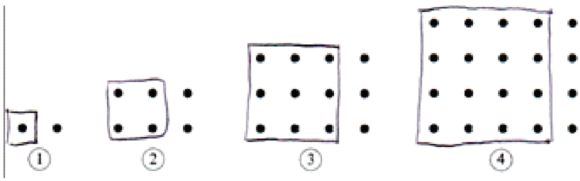
JÚLIA: Que legal professor! Dá para ir até quanto?
PROFESSOR: Eu construí o controle com mínimo 1 e máximo 20, mas podia ser mais. Neste caso, podemos construir as figuras 1 a 20 de nossa sequência.
JÚLIA: Professor mostre a figura 10.
PROFESSOR: Sim. Vejam.



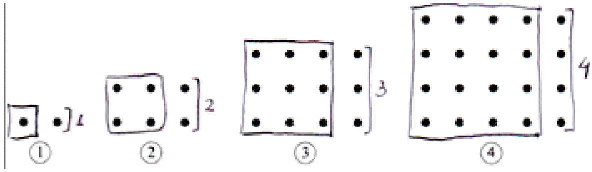
PROFESSOR: Por que estou mostrando isso para vocês? Quero que vocês estabeleçam uma forma de contagem dos pontos de cada uma das figuras da sequência. Penso que a análise das figuras da sequência ou cada uma vista isoladamente como no GeoGebra possibilita perceber um padrão. Eu não utilizaria de uma tabela para resolver o que é proposto neste enunciado.

Em seguida, o professor solicitou que os grupos retomassem suas conversas em busca da resolução do problema proposto. Em um dos grupos o diálogo entre os integrantes ficou um tanto dividido. Enquanto alguns falavam com referência à sequência de figuras do enunciado, outros passaram a falar com referência ao arquivo que o professor acabara de exibir. Dos seis integrantes do grupo três integrantes se reuniram em torno do enunciado e outros três (Júlia, Mara e Rodolfo) foram até a mesa do professor solicitar que ele exibisse outras figuras modificando o valor de n.Os três estudantes que se concentraram nas figuras do enunciado encontraram uma solução da seguinte forma:

> ANDRÉ: O professor disse que não utilizaria uma tabela para resolver o problema. Disse também que era para encontrar uma forma de contar os pontos de cada figura.
> FELIPE: Eu acho que podíamos contornar um conjunto de pontos com um quadrado. Assim,



> ANDRÉ: Em que isso ajuda a gente achar a fórmula?
> CARLA: André, o Felipe contornou um conjunto de pontos que dá para escrever uma multiplicação.
> FELIPE: Isso. Para encontrar a quantidade de pontos dentro do quadrado multiplico o número da figura por ele mesmo. Na figura 2, é 2 vezes 2, na 3, 3 x 3 e, na figura 4, 4 x 4 [interrompido por André].
> ANDRÉ: E o que a gente faz com os pontos que não estão dentro do quadrado?
> CARLA: André, veja que a quantidade de pontos que ficam fora de cada quadrado é igual ao número da posição da figura na sequência.



> FELIPE: Então, a fórmula para calcular a quantidade de pontos de uma figura depende somente do número de sua posição.“posição x posição + posição”

Neste momento, era projetada na parede da sala a tela do computador do professor que exibia a figura para n = 6 enquanto conversa com Júlia e outros dois membros do grupo.

Felipe, Carla e André substituíram o valor 6 na sentença que escreveram. O resultado do cálculo correspondeu à quantidade de pontos da figura projetada na parede.

> ANDRÉ: Nossa fórmula está certa! Dá para calcular os pontos das figuras que o professor construiu no computador. Vamos pedir para ele mostrar a figura 20 e verificar se bate também?
> FELIPE: Não precisa. Nós fizemos os cálculos certos. Vai bater para todas que são construídas seguindo o processo do problema.

Enquanto isso, Júlia, Mara e Rodolfo desenvolviam outra sentença que permitia encontrar a quantidade de pontos de uma figura de ordem n.

> MARA: Professor, sabe o que eu observei quando o senhor modificou os valores no programa?
> PROFESSOR: O que?
> MARA: Que os pontos estão organizados em um retângulo com uma coluna a mais que o número de

> linhas.
> JÚLIA: E o número de linhas é igual ao número n.
> PROFESSOR: E como expressar o número de colunas?
> MARA: Por n + 1, sempre.
> RODOLFO: Para calcular a quantidade de pontos devemos multiplicar a quantidade de linhas pela quantidade de colunas. A fórmula vai ser n vezes n + 1.

Dessa forma, em um mesmo grupo, os alunos a partir de referências distintas, em um caso a imagem do enunciado e, em outro caso, o arquivo construído pelo professor, chegaram a fórmulas para o cálculo da quantidade de pontos de uma figura da sequência. Há dois processos de construção em jogo: um que acontece a partir de uma generalização e outro que se concentra no genérico. Para Lins (2004), "A situação 'generalizada' emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares [...] ao passo que a situação 'genérica' emerge quando tratamos *diretamente* daquilo que é geral numa situação" (LINS, 2004, p. 114, grifos do autor).

Os alunos que se concentraram na sequência de figuras do enunciado estabeleceram uma forma de contar os pontos e verificaram que esse método poderia ser aplicado a cada figura 1, 2, 3 e 4 da sequência. O passo seguinte foi relacionar as quantidades no interior do quadrado e as que ficaram fora dele com o número da figura. Estabelecida a relação, o passo seguinte, a partir da compreensão que todas as figuras são formadas por um mesmo princípio, foi inferir que seus pontos devem possuir uma mesma organização e o método de contagem se estende para todos os casos. Em outras palavras, o processo de generalização permitiu construir uma afirmação geral a partir do que é comum a cada figura da sequência.

O arquivo exibido pelo professor permitiu também a análise de casos particulares, mas não permitia olhar para uma figura e a seguinte (ou a anterior) em um mesmo campo visual ou em um mesmo momento, pois à medida que o valor de n era modificado "uma figura dava lugar a outra da sequência". O foco da atenção, neste caso, se concentrava na estrutura geral das figuras. Daí a afirmação dos alunos sobre as figuras formarem retângulos com n linhas e n + 1 colunas.

Os dois processos descritos acima e identificados nas atividades dos integrantes de um grupo resultaram em duas sentenças matemáticas equivalentes, o que era de se esperar. No próximo passo, o professor tem por objetivo estabelecer uma notação matemática que seria útil para escrever de forma resumida, as sentenças desenvolvidas e, a partir delas, levar os alunos a construírem argumentos sobre tais expressões.

> PROFESSOR: Temos aqui duas sentenças: n.(n + 1) e "posição x posição + posição". Como ambos, "n" e "posição", são referentes a uma figura de ordem n na sequência, vamos escrever as duas assim:
> $A(n) = n.(n + 1)$ e $B(n) = n.n + n = n^2 + n$
> MARA: O que são A e B, professor?
> PROFESSOR: São os nomes das expressões. E ao mesmo tempo são quantidades de pontos das figuras que dependem de n. Como sabemos que essas duas fórmulas funcionam?
> JÚLIA: $A(2) = 2.(2 + 1) = 6$, que é a quantidade de pontos da figura 2 calculado pela fórmula A. E $B(2) = 2^2 + 2 = 6$ é o cálculo da quantidade de pontos da figura 2 calculado pela fórmula B. Os cálculos resultam em um mesmo valor.
> PROFESSOR: Teria outra forma de garantir que elas são iguais sem utilizar valores específicos?
> MARA: Sim, uma fórmula pode ser escrita igual a outra. A nossa $A(n) = n.(n + 1) = n^2 + n$, fazendo as contas fica igual a deles.
> FELIPE: Professor, as duas fórmulas saíram de

> duas formas diferentes de pensar a partir do mesmo problema. Isso já não garante que elas sejam iguais?
> PROFESSOR: Sim, garante, desde que o desenvolvimento esteja correto e a lógica das operações tenha sido obedecida. Mas a ideia de nossa conversa é tentar explicitar outros modos de argumentar a respeito da equivalência das sentenças que vocês desenvolveram.

Como já mencionado, a discussão com os alunos deixa de tomar como referência a sequência de figuras e passa a focar as sentenças matemáticas. Busca-se por argumentações sobre suas validades e as possíveis transformações que podem ser operadas para explicitar a equivalência das expressões. Aparecem argumentos baseados em valor numérico, em transformação de uma sentença na outra, por meio de manipulação simbólica, o que parecia ser um dos objetivos do professor ao abordar o tópico de estudo.

A conversa com os alunos continua e o interesse deles em saber sobre como o professor realizou a construção da figura no GeoGebra deve causar modificação em seus planos.

> RODOLFO: Professor você utilizou qual das fórmulas para construir o arquivo que mostrou para nós?
> PROFESSOR: Eu não utilizei nenhuma delas. Eu... [interrompido por Rodolfo]
> RODOLFO: Não!? Podia ensinar a gente a como construir o arquivo.

O professor pareceu um tanto surpreso com a proposta de Rodolfo que foi apoiada por outros integrantes do grupo. Ele solicitou que aguardassem o fim daquela atividade para que isso fosse proposto aos demais alunos.

Para finalizar a resolução do problema, o professor promoveu uma conversa envolvendo todos os grupos cujo principal objetivo era compartilhar as sentenças matemáticas a que chegaram e os processos utilizados durante a resolução do problema.

O professor não havia planejado construir aquele tipo de objetos no GeoGebra juntamente com os alunos, pois demandaria conhecimentos do *software* relacionados a códigos de programação que os alunos ainda não dominavam. Em sua abordagem, ele pretendia se concentrar no que denominou de "descobrindo padrões e construindo sequências". Mesmo diante disso, ele não tinha como negar que Rodolfo apresentasse para os alunos da sala a proposta que fizera, ou seja, que dedicassem um tempo para construir a sequência do enunciado utilizando o *software*.

A maioria dos alunos aprovou a ideia. A partir daí ele propôs que os alunos trouxessem dispositivos móveis como notebook e tablets para a realização desse trabalho na aula do dia seguinte. É importante ressaltar que a utilização do GeoGebra em aulas de matemática não era uma novidade naquela turma. O programa foi empregado pelo professor na abordagem de outros tópicos de matemática e os alunos possuíam conhecimentos sobre a utilização de alguns recursos do programa e era comum ficarem encarregados de utilizarem o *software* em atividades extraclasses.

O pedido de Rodolfo levou a uma mudança de planos do professor. Segundo ele, realizar a construção da sequência no GeoGebra traria a oportunidade de abordar outras formas de descrição das sequências. O professor não podia perder a oportunidade de levar os alunos a perceberem que aquela construção demandaria de conhecimentos matemáticos, mas, também, de outros conhecimentos específicos, entre eles, lidar com os objetos internos do GeoGebra, sua linguagem, suas possibilidades e seus limites.

Na descrição deste episódio, os alunos estavam em uma atividade de observar algumas construções, identificar características comuns, estabelecer modelos e descrevê-los por meio de uma expressão matemática. Suas ações, falas e produções diziam respeito a certo modo de tratamento para aquelas coisas que culminava na produção de certos conhecimentos matemáticos.

A experiência de construir a sequência de figuras no GeoGebra possibilitou ao grupo se inserir em outra dimensão de trabalho, o que será abordado no episódio 4.

Episódio 4

Para que fosse possível realizar a construção de sequências no GeoGebra, o professor considerava importante os alunos conhecerem alguns comandos do programa. Um comando consiste de um script com instruções que devem atender a uma sintaxe pré-definida no programa. Os comandos servem, principalmente, para construir objetos, modificar propriedades, realizar ações. Por exemplo: uma construção que pode ser feita com o mouse, um círculo centrado na origem e de raio 2, pode ser também realizada utilizando o comando Círculo[<Ponto>, <Raio>] atribuindo as coordenadas do centro e a medida do raio, ou seja,Círculo [(0, 0), 2].

Para se construir um pentágono regular com dois vértices consecutivos, (1, 1) e (1, 2), basta utilizar o comando Polígono [<Ponto>, <Ponto>, <Número de Vértices>] reescrevendo-o com os dados Polígono [(1,1), (1,2), 5], em que o valor 5 determina o número de vértices ou de lados. Esses comandos devem ser digitados no campo Entrada que, geralmente, é exibido na parte inferior da tela principal do programa.

A aula iniciou com os alunos organizados nos grupos habituais. Alguns alunos trouxeram computadores e outros tablets conforme orientação do professor na aula anterior. Cada grupo de seis alunos contava com, no mínimo, três desses equipamentos. O professor escolheu abordar alguns tópicos iniciais para que, até o final da aula, fosse possível construir no GeoGebra a sequência de figuras formada por pontos que ele utilizou na aula anterior.

Novamente, o professor utilizou o datashow para projetar a tela de seu computador em uma das paredes da sala.

> PROFESSOR: Inicialmente nós vamos aprender a construir algumas sequências no programa. É importante lembrar que vamos utilizar comandos e, para tanto, devemos escrevê-los de acordo com uma linguagem reconhecida pelo programa.

Após essa afirmação, ele digitou no campo Entrada do GeoGebra um comando que tinha a seguinte sintaxe.

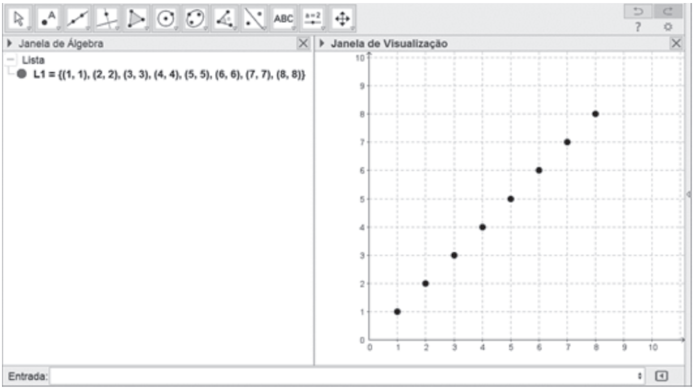
> PROFESSOR: Eu quero construir uma sequência de valores pares que vai de 0 a 10. Quais devem ser os parâmetros utilizados no lugar de <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial> e <Valor Final>. Querem fazer vocês mesmos aí nos computadores de vocês? A sequência que devemos obter é {0, 2, 4, 6, 8, 10}.
> ALEX: Professor, o que é a variável? É x?
> PROFESSOR: A variável é um símbolo que vai assumir um conjunto de valores delimitado pelo valor inicial e pelo valor final. Não pode ser x, pois o programa não reconhece. Ele reconhece x somente para escrever funções.
> ALEX: Eu digitei Sequência[2k, 0, 5] e não deu certo.
> PROFESSOR: Pessoal, além de escrever a expressão é preciso escrever o nome da variável em uso, assim, Sequência[2k, k, 0, 5].
> ALEX: Agora deu certo professor. O programa retornou lista 1 = {0, 2, 4, 6, 8, 10}.

Na conversa desenvolvida com os alunos, o professor informou também que a expressão pode ser escrita explicitando ou omitindo o asterisco que serve como sinal de multiplicação: 2k ou 2*k. Alguns alunos utilizaram a, b, m, j e i para a variável. O professor ressaltou que as variáveis utilizadas tanto no GeoGebra como para escrever expressões matemáticas que geralmente aparecem em materiais didáticos, são escolhidas por convenção, ou seja, um conjunto de praticantes da área de conhecimento entra em certo tipo de acordo quanto à utilização dessas notações. Por exemplo: x para abscissa e y para a ordenada de um par ordenado, foi uma escolha em um processo ocorrido ao longo da história.

> PROFESSOR: Agora, vamos construir uma sequência de pontos em que o valor de abscissa seja igual ao valor da ordenada, ou seja, pares ordenados do tipo (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) e assim em diante. Nossa lista deve iniciar em (1, 1) e ir até (8, 8). Como fazemos isso?
> ANDRÉIA: Professor, nós teremos que utilizar duas variáveis?
> PROFESSOR: Se o valor da primeira é sempre igual ao valor da segunda, nós temos necessidade de usar duas?
> ANDRÉIA: Acho que não...
> PROFESSOR: Não é necessário. Se usarmos a letra i, por exemplo, a expressão do comando Sequência, neste caso, será (i,i). Escrevam o comando completo aí nos computadores de vocês.

Após dar tempo suficiente para os alunos escreverem a sintaxe do comando no programa e testarem seu funcionamento, o professor mostrou a projeção da tela na parede com o resultado do comando L1 = Sequência [(i, i), i, 1, 8].

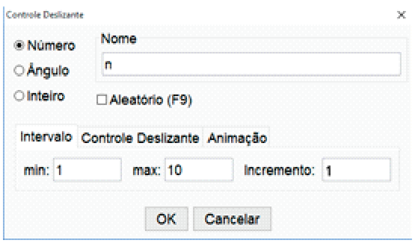
Figura 4: Interface do GeoGebra com a sequência exibida aritmética e graficamente



Fonte: Elaborada pelo professor

CARLA: Professor, na aula passada você utilizou um controle que dava para modificar a quantidade de pontos da figura...

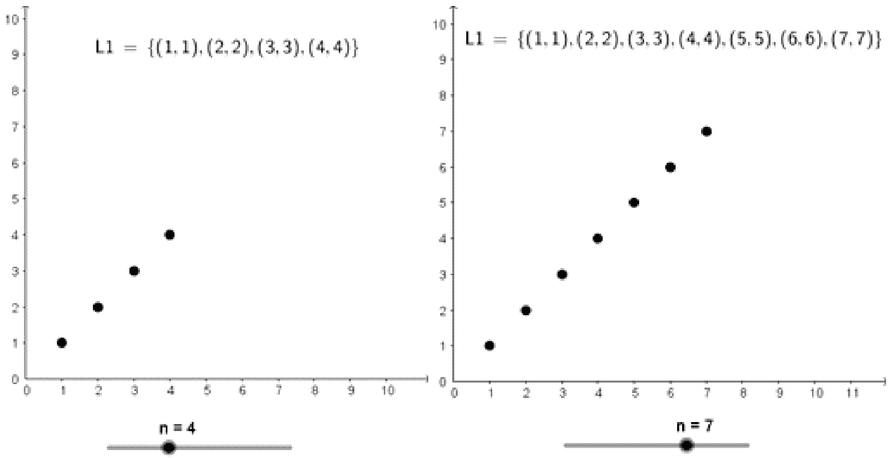
PROFESSOR: Sim. No programa esse controle é chamado de controle deslizante. Você deve clicar no penúltimo ícone. Depois, clicar na janela gráfica (Janela de Visualização). Vai abrir uma caixa em que você deve digitar um nome, um valor mínimo, um valor máximo e um incremento. O incremento informa de quanto em quanto os valores devem crescer ou decrescer.Vamos fazer um controle para a sequência que acabamos de construir. Nomearemos de n, com valor mínimo 1, valor máximo 10 e incremento 1.



O professor aproveitou a oportunidade para discutir com os alunos a diferença entre uma variável e um parâmetro. Mas, antes, ele precisava alterar a escrita da sequência L1 que tinham construído anteriormente. Para isso, ele orientou os alunos a clicarem na sequência L1 e, em seguida, pressionarem a tecla F2, para que ela entrasse em estado de edição, ou seja, um estado em que a escrita do comando podia ser modificada. No lugar do número 8 em Sequência [(i, i), i, 1, 8] deveria ser digitado n, o que modificaria sua sintaxe para Sequência [(i, i), i, 1, n].

Realizada essa modificação, o professor sugeriu que os alunos alterassem o valor do controle deslizante n e passassem a observar que o controle n determinava o extremo de um conjunto de valores naturais e a sequência era recalculada à medida que n assumia valores de 1 a 10.

Figura 5: Sequência L1 com quantidade de termos controlada por n



Fonte: Elaborada pelo professor

> PROFESSOR: Notem que em nossa expressão Sequência [(i, i), i, 1, n], i e n, assumem papéis diferentes. A variável i vai assumir um conjunto de valores que iniciam em 1, crescem de 1 em 1 até n. Notem que não há informação na escrita do

> comando que i tem incremento 1, mas assim acontece, pois, o comando foi programado para ter esse comportamento e sintaxe. Quanto ao limite da sequência, nós escrevemos que seu valor máximo é n. Dessa forma, no interior do comando sequência, n é um parâmetro e i uma variável.

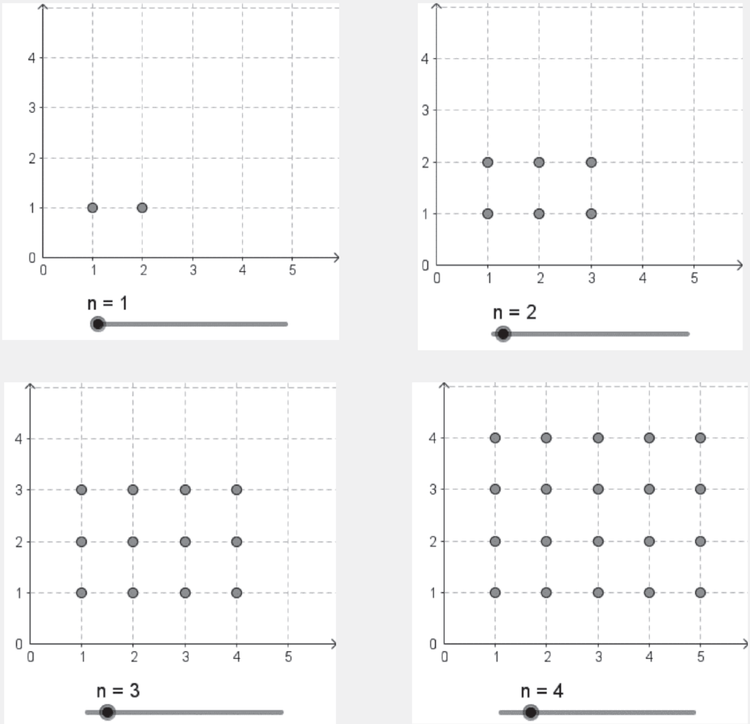
Outras sequências que envolvem números e pontos foram construídas no mesmo arquivo. Esse primeiro momento da aula, segundo o professor João, era necessário para que os alunos se familiarizassem com a utilização de comandos do programa, pois ele não havia contemplado isso em momentos que utilizaram o programa.

Os comandos do GeoGebra são escritos de acordo com uma linguagem própria do programa. Por exemplo: o sinal de multiplicação é um asterisco. Há comandos específicos para construir círculos de várias formas: dado centro e raio e a partir de três pontos, são dois casos. Eles resumem internamente a produção de resultados matemático, mas, para isso, foram programados pelos construtores de acordo com uma linguagem resumida que precisa ser compreendida pelos usuários para, em seguida, obterem os resultados desejados. Em outras palavras, os usuários do programa precisam se apropriar de um modo de proceder e de uma linguagem própria do programa.

A partir dessa abordagem inicial, o professor compreendia que já dispunham de uma base necessária para construir uma sequência de pontos. Assim, ele entregou aos grupos o enunciado da proposta daquela aula.

Figura 6: Enunciado 4

Construa um arquivo utilizando o comando sequência e um controle deslizante que seja possível obter as seguintes figuras à medida que o controle assume valores em um intervalo de 1 a 4.

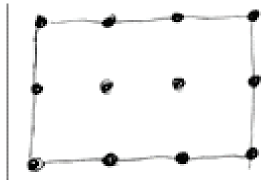


Fonte: Elaborado pelo professor

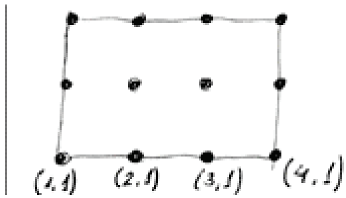
Em um dos grupos de trabalho, os alunos deixaram momentaneamente de lado os computadores e os tablets e se concentraram em discutir entre eles como aplicar os comandos abordados pelo professor.

> FELIPE: Vamos fazer igual o professor fez. Construir uma sequência de pares ordenados, de pontos.
> ANDRÉ: Mas como deve ser a expressão para que esses pares ocupem todo o retângulo?

FELIPE: Como assim, retângulo?
ANDRÉ: Felipe, quando n vale 3, aqui na folha que o professor deu, tem a figura 3... Ela é formada por 12 pontos que são distribuídos sobre um retângulo. Assim..



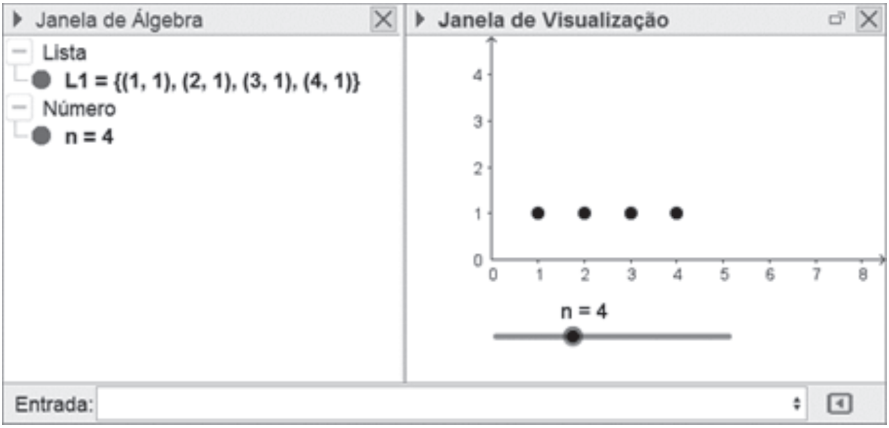
MARA: Vamos então escrever as coordenadas dos pontos no desenho do André. Temos que escolher onde começar...
ANDRÉ: Não entendi.
MARA: Deixe eu escrever aí no seu desenho. [André passa o desenho para Mara]. Este ponto aqui é (1, 1), o próximo é (2, 1), o próximo é (3, 1) e o último é (4, 1)..



FELIPE: Legal! Tem um padrão aí! Os pontos da primeira linha têm o mesmo valor para y que é 1. Vamos construir uma sequência no GeoGebra para a primeira linha da figura. Depois, pensamos no restante.

Felipe digitou no campo Entrada o comando L1 = Sequência[(a, 1), a, 1, n], em que n era o nome de um controle deslizante que construiu. Após teclar Enterobteve o seguinte resultado:

Figura 7: Interface após Felipe construir a primeira linha da figura 4



Fonte: Elaborada durante a aula

> MARA: Não deu certo. A figura 4 é obtida com n = 4 deve ter cinco pontos na linha.
> FELIPE: Acho que erramos no comando. Nós digitamos L1 = Sequência [(a, 1), a, 1, n] e devíamos colocar até n + 1, pois a linha tem um ponto a mais que a coluna nas figuras do enunciado. Vamos arrumar para Sequência [(a, 1), a, 1, n + 1].
> RODOLFO: Felipe eu tenho uma sugestão para nós obtermos as linhas de cima da figura e obter o retângulo. Podíamos escrever os pontos como (a, b) e usar duas variáveis. A primeira (a) variando como já está no comando e, a segunda (b), variando de 1 a n.
> FELIPE: Como nós escreveríamos isso no comando?
> RODOLFO: Assim, Sequência [(a, b), a, 1, n + 1, b, 1, n]. Vamos tentar no programa?
> FELIIPE: Deu erro! Eu digitei isso que você escreveu...

Os alunos chamaram o professor e descreveram o que tentaram fazer.

> PROFESSOR: Compreendi o modo como vocês descreveram o objeto... Para mim é como tivéssemos dois conjuntos ϵ A= {1, 2,..., n + 1} ebϵB = {1, 2,..., n}. Vocês querem obter todos os pares do tipo (a, b). Estou falando isso para que notem que esse objeto visualizado por vocês pode ser perfeitamente descrito por mim, como acabei de fazer. Pode também ser descrito por uma sentença matemática (A x B). No entanto, embora estejamos trabalhando com a versão mais recente do programa, ele não possui um comando que permita por duas variáveis em um comando Sequência.Encontramos uma limitação no programa! Como podemos superar essa limitação e produzir o resultado que queremos?
> JÚLIA: Vamos utilizar duas vezes o comando Sequência?
> PROFESSOR: Sim! Isso mesmo! Mas, como?
> JÚLIA: Eu respondi isso não sei bem porque professor... Mas, já que é possível uma variável a cada comando, pensei que pudéssemos usá-lo duas vezes seguidas.
> PROFESSOR: Então tentem pensar da seguinte forma: no GeoGebra nós podemos escrever um comando como expressão do comando Sequência. Quando criamos uma sequência de pontos fazemos isso, a expressão do comando é um comando que constrói um ponto, como vocês fizeram. Então, no lugar da expressão de um comando Sequência vocês vão escrever outro comando Sequência. Tentem.

O professor se afastou do grupo e deixou que eles se organizassem. Segundo ele, era importante que os alunos testassem suas hipóteses, pois ele acredita que, nessas aulas em que o computador é utilizado, o aluno tem a oportunidade de realizar uma ação, desfazê-la caso necessário e refazê-la modificando parâmetros. Em outras palavras, os problemas matemáticos podem ser abordados levando-se em conta a possibilidade da experimentação.

Após uma boa dose de testes de hipóteses levantadas em conversas, mensagens de erros do programa, obtenção de construções indesejadas, os alunos escreveram o comando de tal forma que o objeto "idealizado" por Rodolfo fosse realizado. Eles utilizaram o seguinte comando:

L1= Sequência [Sequência [(a, b), a, 1, n+1], b, 1, n]

A intervenção do professor levou em consideração o que os alunos queriam realizar: o produto cartesiano entre dois conjuntos de números naturais. E, para isso, o professor sugeriu que os alunos utilizassem dois comandos sequência aninhados (conjuntamente).

Outros grupos também conseguiram realizar a construção proposta pelo professor, porém utilizando formas diferentes. Em um dos grupos, quando o professor foi chamado, os alunos haviam construído um controle deslizante n e uma sequência de n + 1 pontos alinhados horizontalmente. Um integrante do grupo pediu que o professor ajudasse a "replicar aquela linha de n pontos na vertical, uma quantidade n de vezes". O professor sugeriu que, por meio do comando Transladar, eles obtivessem "cópias" da primeira sequência usando múltiplos de um vetor.

Nessa última construção, o conjunto de pontos alinhados horizontalmente foi obtido a partir de um controle deslizante n e do comando sequência.

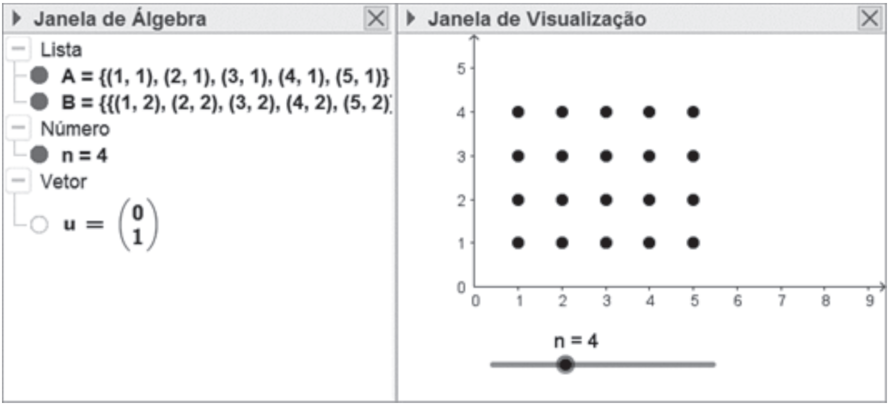
A = Sequência [(k, 1), k, 1, n+1]

Com a intervenção do professor, os alunos construíram um vetor u = Vetor[(0, 1)], vertical em relação ao eixo x. Em seguida, realizaram experimentações no programa econcluíram que ao multiplicar um vetor por um número natural k > 1 obtinham como resultado vetores de mesma direção e sentido de u, mas com comprimento multiplicado por k.

Em seguida, os alunos construíram outra sequência em que a expressão do comando sequência tinha o comando Transladar [<Objeto>, <Vetor>]. O vetor utilizado por eles correspondeu à multiplicação do vetor u pela variável da sequência.

B = Sequência[Transladar[A, i*u], i, 1, n - 1]

Figura 8: Interface do arquivo após concluir a construção das figuras



Fonte: Elaborada durante a aula

A aula estava quase chegando ao fim enquanto os grupos compartilhavam uns com os outros o resultado do trabalho. Enquanto comunicavam aos demais sobre os processos utilizados na construção, o professor questionava sobre quais objetos matemáticos foram úteis, quais comandos foram empregados e, sobretudo, como a construção da figura foi concebida. O professor tinha as respostas para tais perguntas, uma vez que conversou com os grupos durante o processo de construção e, justamente por isso, sabia que os alunos obtiveram o mesmo resultado gráfico utilizando processos e objetos diferentes. Sua intenção era que eles compartilhassem, diferentes formas de resolução de um mesmo problema.

O trabalho com esse mesmo tópico de estudo foi realizado por mais duas aulas, em que recursos semelhantes aos já descritos foram empregados. Porém, o relato dos quatro episódios fornece elementos suficientes para compartilhar uma forma de trabalho baseado na interação e lançar um olhar para a produção de conhecimentos tomando como base o Modelo dos Campos Semânticos, o que é realizado na seção seguinte deste texto.

Considerações finais: implicações para o ensino de matemática

Antes de argumentar sobre os episódios de sala de aula, é preciso enunciar minha compreensão sobre produção de significados que é baseada no Modelo dos Campos Semânticos (MCS), um modelo epistemológico cujas noções centrais são significado, objeto e conhecimento.

Significado é tudo o que se pode e efetivamente se diz de um objeto em certa atividade[3] ou situação (LINS, 1999, 2004) e objeto é “algo a respeito de que se [diz] algo” (LINS, 2004, p. 114). Assim, nessa perspectiva, produzir significados é “falar a respeito de um objeto” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 146). Um exemplo: quando alguém fala que um triângulo isósceles corresponde a um triângulo com, no mínimo, dois lados de mesma medida, esse alguém não está falando de todos os possíveis significados que se pode produzir para esse objeto, mas do que, na situação específica, se diz efetivamente.

Durante os episódios foram destacadas diversas falas/enunciações dos estudantes enquanto resolviam os problemas propostos. Essas enunciações traziam à tona modos legítimos de produção de significado que, em certos momentos, tomavam como referência o texto do enunciado, em outros, uma afirmação de outro colega ou do professor, em outros, um esboço rascunhado em um papel ou uma construção realizada no computador.

Essas enunciações revelam uma dinâmica de produção de

[3] “Por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo” (VYGOTSKY; LURIA; LEONTIEV,1988, p. 68).

conhecimentos. Já que, conhecimento, no MCS, pode ser entendido como "uma crença-afirmação (enunciação de algo que se acredita ser correto) junto com uma justificação que torna legítimo enunciar aquela crença-afirmação" (LINS, 2002, p. 44). A justificação "Não é justificativa. Não é explicação para o que eu digo." (LINS, 2012, p. 21), não vem antes nem depois, ela está junto, e seu papel não é explicar a crença-afirmação, mas tornar sua enunciação legítima (LINS, 2002, p. 44), pois,

> ao produzir significado, minha enunciação é feita na direção de um interlocutor [que "é uma direção na qual se fala"] que, acredito, diria o que estou dizendo com a justificação que estou produzindo. Isto quer dizer que a legitimidade de minha enunciação não é função de algum critério lógico ou empírico que eu pusesse em jogo, e sim do fato de que acredito pertencer a algum espaço comunicativo. Eu já havia indicado que compartilhar um espaço comunicativo é compartilhar interlocutores e isto, junto com a elaboração que fiz da produção de significados na direção de interlocutores, garante que toda produção de significado é dialógica no sentido cognitivo (LINS, 1999, p. 88).

Nas conversas apresentadas, havia a perspectiva do professor de ouvir suas enunciações dos alunos sobre o objeto em estudo. Um tipo de interação em que tudo o que era dito por alguém era considerado. Segundo ele, "se alguém falou algo é porque foi legitimo de ser falado". Quando os alunos conversavam com o professor solicitando sua intervenção, descreviam uma abordagem inicial que vislumbravam para o problema proposto. E, uma vez, que elas eram faladas/ouvidas, o segundo passo consistia em interagir com os estudantes a fim de que construíssem justificações.

Segundo o que foi observado nos episódios, as justificações eram construídas com base na observação, no teste de hipóteses, na experimentação, no compartilhamento e confrontamento de ideias. E, é nesse cenário que a utilização do computador com o *software* GeoGebra trouxe um ganho qualitativo. Ele foi inserido em uma atividade de investigação em que possibilidades foram ampliadas. Em um primeiro momento o professor utilizou uma construção geométrica no *software* para que os alunos percebessem a estrutura geral de uma sequência de figuras a partir da análise de modificações de um termo a outro. Em um segundo momento, a atividade se concentrou em utilizar uma nova linguagem, que se traduziu em comandos no *software*, para construir padrões geométricos. Em resumo, no primeiro momento o *software* ofereceu elementos visuais imprimindo movimento ao que era visualizado no papel, e permitiu a produção de enunciações e justificações em outras direções, no segundo momento, ofereceu um cenário em que uma nova linguagem é apreendida para constituir/inventar objetos até então inexistentes para aqueles sujeitos.

Ao longo dos episódios é possível destacar momentos em que a fala é concentrada no professor, em outros momentos o professor ouvia as argumentações dos alunos, em seguida, perguntava algo e, às vezes, sugeria caminhos. Mas, na maioria do tempo os alunos conversavam entre si. Segundo a leitura que o MCS permite fazer, o que estava em jogo diz respeito ao compartilhamento de diferenças. E quando escrevo diferença não estou me referindo aquela baseada em assimetrias, ou seja, em que de um lado da interação um diz "eu sei" e do outro lado, o outro diz "eu não sei", mas "a diferença que motiva a interação, que dá a esta o sentido que me parece mais próprio" (LINS, 2008, p. 531). Aquela que acontece por conta de produções de significados distintos em que os sujeitos permanecem na interação, porque no compartilhamento da diferença está

> a mais intensa oportunidade de aprendizagem (para ambos): é apenas no momento em que posso dizer "eu acho que entendo como você está

> pensando" que se torna *legítimo e simétrico dizer*, à continuação, "pois eu estou pensando diferente, e gostaria que você tentasse entender como eu estou pensando" (LINS, 2008, p. 543, grifos do original).

Considero importante ressaltar que durante o episódio 4, o professor foi chamado pelos alunos em dois grupos que haviam iniciado a construção das figuras no *software*. Ambos haviam iniciado o processo do mesmo modo: construído um conjunto de n + 1 pontos alinhados horizontalmente utilizando um controle deslizante n e o comando sequência. Mas, ao solicitarem a intervenção do professor compartilharam com ele propostas diferentes para a continuação da construção e necessitavam de sua intervenção. O professor, levando a sério seus alunos, sugere caminhos em que o projeto dos grupos era possível de ser realizado. Diante desta perspectiva de interação, ambos, alunos e professor, encontram um espaço para produção de novos conhecimentos, pois o que se aprende não são conteúdos, mas modos legítimos de produção de significado, o que se traduz em legitimidades.

> Quando Vygotsky fala da Zona de Desenvolvimento Próximo, e diz que é um processo, no qual primeiro a pessoa é capaz de fazer algo apenas com a ajuda de alguém mais experiente, e depois passa a ser capaz de fazê-lo sozinho, eu vejo o seguinte: antes a pessoa já *sabia fazer,* mas não sabia que *podia fazer aquilo naquela situação* (contexto, atividade). O alguém mais experiente lhe empresta, então, *a legitimidade para fazer aquilo naquela situação* e, assim que esta *legitimidade* é internalizada, o "aprendiz" não precisa mais da presença do outro, ele já sabe falar sozinho naquela

direção (cognitiva) (LINS, 2008, p. 543, grifos do autor).

Ainda segundo Lins (1999), é comum o professor responder perguntas que não foram feitas. Em práticas centradas em conteúdo, geralmente, são oferecidas legitimidades, modos de agir, sem que antes sejam conhecidas as legitimidades do aluno. Talvez elas não sejam importantes! Porém, o caso aqui é outro, nas práticas que destacamos por meio dos episódios, o primeiro ato era marcado por considerar as legitimidades do aluno. Por fim, vale destacar que a escolha do professor de centrar o foco de seu trabalho no sujeito ao invés de no conteúdo, consiste em uma escolha interessante quando o objetivo é levar o outro a sério.

Referências

CALANDRA, Alexander. **A lenda do barômetro.** 1961. Disponível em: http://www.fisica-interessante.com/piada-de-fisica-lenda-barometro.html. Acesso em: 7 nov. 2015.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

LINS, Rômulo Campos. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 75-94.

LINS, Rômulo Campos. **Análise Sistemática e crítica da produção acadêmica e da trajetória profissional.** 2002. 87p. Tese (Livre Docência). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

LINS, Rômulo Campos. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p. 92-120.

LINS, Rômulo Campos. A diferença como oportunidade para aprender. ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino. **Anais.** Porto Alegre: ediPUCRS, 2008, p. 530-550.

LINS, Rômulo Campos. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, Claudia Laus; BARBOSA, Edson Pereira; SANTOS, João Ricardo Viola; DANTAS, Sérgio Carrazedo; OLIVEIRA, Viviane Cristina Almada de (org.). **Modelo dos campos semânticos e educação matemática**: 20 anos de história, São Paulo: Midiograf, 2012, p. 11-30.

LINS, Rômulo Campos. **Talvez isto não devesse acontecer numa tese**: depoimento. 17 de fevereiro, 2012b. Rio Claro. Entrevista concedida a João Ricardo Viola dos Santos.

VYGOTSKY, Lev Semenovich; LURIA, Alexander Romanovich; LEONTIEV, Alexei Nikolaevich. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** São Paulo: Ícone, 1988.

Capítulo 11

Uma abordagem de polinômios a partir da representação algébrica com o geogebra

Maria Ivete Basniak
Dirceu Scaldelai

Introdução

Trazemos neste trabalho uma abordagem para discutir o conteúdo de polinômios, a partir de sua representação geométrica, utilizando quatro objetos de aprendizagem, desenvolvidos no âmbito do GETIEM (Grupo de Estudos Teóricos e Investigativos em Educação Matemática). Pautamo-nos em estudos anteriores (BANADIMAN, 2012) e (BERTOLI; SCHUHMACHER, 2013) que mostraram resultados satisfatórios ao trabalhar com o mesmo conteúdo de forma similar, utilizando material concreto enquanto nós utilizamos tecnologias digitais, mais especificamente o GeoGebra, em sua versão 5.0.168-3D, para a construção dos objetos de aprendizagem, o que possibilitou tornar o material mais dinâmico.

Por ser um material dinâmico e que permite atribuir algum significado ao estudo das operações que envolvem polinômios, relacionando-as à área de retângulos, acreditamos poder contribuir para superar dificuldades em compreender operações algébricas, de que, entre outras, destacamos o nível de abstração exigida dos alunos, que acaba gerando em certos casos repúdio ao conteúdo.

Articulando Álgebra e Geometria

Nos mais diferentes níveis de ensino, vivenciamos questionamentos e discussões referentes aos métodos utilizados no processo de ensino de Matemática nas escolas, os quais nem sempre apresentam resultados satisfatórios e que revelam que há problemas que precisam ser discutidos, entre os quais, como apontado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): "a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama" (BRASIL,1997, p.15).

Nesse sentido o processo de ensino carece abandonar abordagens fragmentadas e mecânicas, possibilitando que o aluno construa significados de conceitos matemáticos. Anseia-se por uma mudança no processo metodológico que permita um ensino baseado na construção de argumentos, de indagações, investigações e explorações que favorecem o pensamento matemático, desapegando de regras, possibilitando ao aluno a construção de significados matemáticos aos conceitos abordados. Mediante isso, os PCN destacam que

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam

> favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos (BRASIL, 1997, p.19).

O que aparece também como um indicativo nas Diretrizes Curriculares de Matemática da Educação Básica do Paraná, indicando que "os conteúdos devem ser apresentados de modo que um seja abordado sob o contexto do outro. Assim, os Conteúdos Estruturantes transitam entre si através dessas articulações" (PARANÁ, 2008, p. 62).

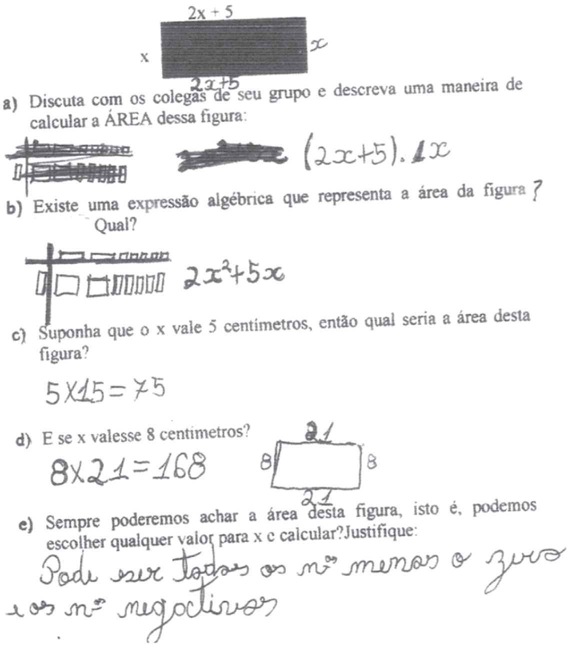
Nesse sentido, Banadiman (2012) e Bertoli e Schumacher (2013), buscando uma aprendizagem da Álgebra com mais significado para o aluno, desenvolveram e aplicaram tarefas, utilizando materiais manipulativos e algeplan[1], respectivamente, para o ensino da Álgebra e das operações consequentemente. Desenvolveram propostas que aproximam a Álgebra da Geometria, em que podemos aplicar um polinômio definido nos reais positivos à área de uma figura, limitando o grau máximo desse polinômio a dois, sendo seus coeficientes pertencentes ao conjunto dos inteiros. A intenção do material é que o aluno consiga atribuir algum sentido às operações, para conseguir desenvolver noções básicas de como essas operações podem ser efetuadas, tornando a generalização um processo gradativo e constante.

Ao tratar da multiplicação especificamente, Banadiman (2012, p. 114), que trabalhou com material manipulativo, composto por retângulos e quadrados confeccionados em papel cartão colorido, cujos lados representavam diferentes medidas, destaca, entre os resultados obtidos, o fato de os alunos, ao serem solicitados a resolverem uma questão que pedia a área de determinada figura, dado o valor de x, que "Todos, sem exceção, utilizaram a figura inicial como

[1] Material que relaciona figura geométrica (quadrados e retângulo) com a álgebra (BANADIMAN, 2012).

parâmetro para responder e substituíram o valor de x nas expressões algébricas associadas aos lados do retângulo".

Figura 1: Solução de aluno para problema que envolve atividade com o uso de operações – multiplicação



Fonte: Banadiman (2012)

Bertoli e Schumacher (2013, p. 14) destacam entre os resultados de seu trabalho com o algeplan que "aos poucos os estudantes vão engajando-se no processo de construção do conhecimento, seus questionamentos quanto a como juntar o x com x, deixam de existir quando eles substituem o x por uma figura geométrica, torna-se muito mais fácil operar com material visual".

Banadiman (2012) cita entre os limitadores do material o fato de a rigidez deste dar a falsa ideia ao aluno de x e y serem maiores que a unidade de medida, pela dimensão das peças. Um diferencial entre o material concreto e o uso de *softwares* dinâmicos de matemática é que estes possibilitam variar os tamanhos das peças e fornecem maior dinamicidade ao material e à aprendizagem do conteúdo. Acreditamos que a interação dos alunos com *softwares* dinâmicos de matemática, como é caracterizado o GeoGebra, deve favorecer também uma aprendizagem mais ativa e mudanças na metodologia utilizada pelo professor em sala de aula. Pois entendemos que o trabalho com tecnologias deve possibilitar novas formas de aprendizagem e consequentemente mudanças e avanços no ensino da Matemática.

Assim, os objetos de aprendizagem, aqui sugeridos, foram desenvolvidos, tomando como referência as dificuldades observadas em compreender monômios e polinômios, buscando apresentar uma proposta, associando Álgebra e Geometria, ou mais especificamente monômios à área de retângulos que possibilitasse superar essas dificuldades.

Os objetos de aprendizagem e algumas abordagens possíveis no ensino de Matemática

Apresentamos uma possibilidade de trabalharmos o conteúdo operações com monômios e polinômios relacionados ao conteúdo de Geometria, mais propriamente ao de área de retângulos.

Todos os objetos de aprendizagem propostos possibilitam alterar o valor de x e y por meio da manipulação dos dois controles deslizantes. Conforme alteramos x e y, as medidas dos lados e a área dos retângulos são alteradas, podendo assumir inúmeros valores. Não é possível determinar o valor numérico da área dos retângulos representados no objeto sem atribuirmos um valor numérico ao valor da variável, mas podemos representar algebricamente a área dos retângulos coloridos. Assim, podemos mover o controle deslizante x, por exemplo, e verificar que as áreas dos retângulos que têm os lados dependentes dessa variável são alteradas, porém suas representações algébricas continuam as mesmas, pois a representação das áreas não é alterada.

Entretanto essa abordagem apresenta limitações que precisam ser discutidas, pois, ao relacionarmos a soma de monômios e polinômios com áreas, é preciso tratarmos da questão de que não há representação de áreas negativas, e por esse motivo os monômios com sinal negativo representam áreas a serem retiradas, que podem anular uma área existente ou indicar uma área que está faltando. Outra limitação do objeto refere-se ao fato de os coeficientes dos polinômios serem todos inteiros, pois representam quantidade de retângulos com mesma representação de área.

Discutimos, a seguir, cada objeto de aprendizagem, apresentando possibilidades de abordagens para seu ensino.

Monômios

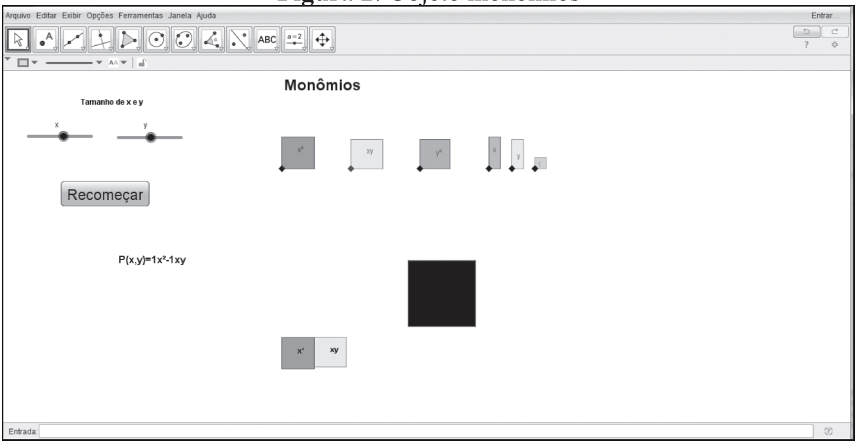
No objeto de aprendizagem monômios[2] (Figura 2) cada um dos retângulos representa um monômio, definido como uma expressão matemática de um único termo que não envolve, portanto, as operações de soma ou subtração. É possível visualizarmos o oposto de cada monômio, clicando no canto inferior esquerdo de cada retângulo, que alterará a tonalidade da cor e sinal do monômio. Tonalidades claras representam monômios negativos e tonalidades escuras, monômios positivos.

Assim, podemos explorar a soma de monômios por meio da manipulação da representação geométrica desses monômios, arrastando-os para dentro da caixa preta. Se arrastarmos, dois monômios semelhantes opostos serão anulados, caso contrário, serão somados. E, ainda, se arrastarmos monômios diferentes, é possível abordarmos a construção de um polinômio, pois o mesmo apresenta o polinômio formado algébrica e geometricamente. Assim, pelas limitações por trabalharmos com áreas de figuras, uma vez que no objeto não há monômios de grau maior do que dois, definimos um polinômio como:

[2] Disponível em: https://tube.GeoGebra.org/material/simple/id/1626395.

$$p(x,y) = \ a_5x^2 + a_4xy \ + a_3y^2 + a_2x \ + a_1y + a_0, com \ \{x,y\} \in R_+ e \ \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_{4,} a_5\} \ \in Z.$$

Figura 2: Objeto monômios



Fonte: Os autores

Ao definirmos monômios, soma de monômios e um polinômio como a soma de monômios distintos, podemos propor questões como: O que é um monômio? Quais as condições necessárias para podermos somar monômios? O que são monômios opostos? Um número é um monômio? O que é um polinômio?

Adição e subtração de polinômios

O objeto de aprendizagem adição de polinômios[3] (Figura 3) possibilita movimentar 14 controles deslizantes, sendo dois para o tamanho de x e y e 12 para alterar os coeficientes de dois polinômios:

$$p(x,y) = \ a_5x^2 + \ \ a_4x\,y + \ \ a_3y^2 \ + a_2x \ + a_1y \ + a_0$$

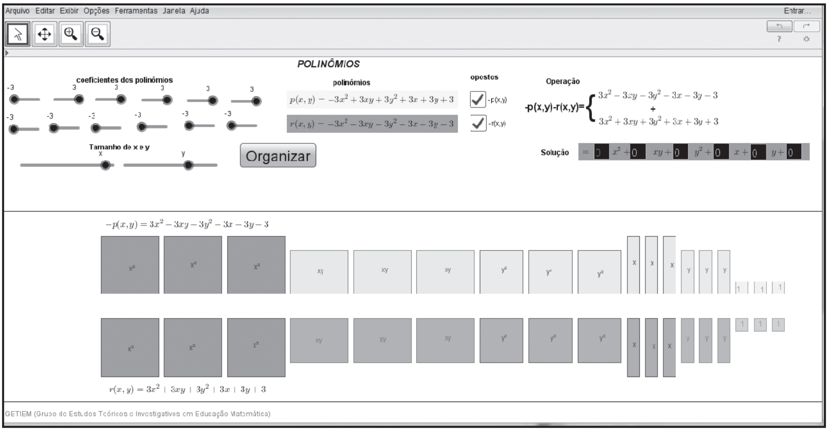
$$r(x,y) = \ b_5x^2 + \ \ b_4xy \ + \ \ b_3y^2 \ + b_2x \ + b_1y \ + b_0$$

$$com \ \{x,y\} \in R_+ e \ \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_{4,} a_5, b_0, b_1, b_2, b_3, b_{4,} b_5\} \ \in Z.$$

[3] Disponível em: http://tube.GeoGebra.org/material/show/id/1430199.

Conforme movimentamos os controles deslizantes, alteramos a representação algébrica e geométrica desses polinômios.

Figura 3: Objeto adição de polinômios



Fonte: Os autores

Temos a opção de operar com os opostos desses polinômios, selecionando as caixas -p(x,y) e/ou -r(x,y), o que altera as representações algébricas e geométricas no objeto.

A operação é realizada geometricamente pela manipulação e contagem dos retângulos que representam x^2, xy, y^2, x, y e 1 unidade de área. As tonalidades escuras representam os monômios positivos e as tonalidades claras, os monômios negativos. É possível arrastar e sobrepor retângulos que, quando se encaixam perfeitamente e são de mesma cor, mas de diferentes tonalidades, "desaparecem". Assim, após todos os retângulos de mesma cor e tonalidade diferente serem sobrepostos, basta contarmos os retângulos que sobraram e completar os campos de entrada Solução. Se o valor completado ficar verde, está correto, se ficar vermelho, devemos rever o valor completado.

A adição de polinômios, assim como a de polinômios opostos, pode ser definida, partindo de questionamentos sobre: O que representa os polinômios p(x,y) e r(x,y)? O que representa o polinômio –p(x,y) em relação ao polinômio p(x,y)? Como podemos somar dois polinômios?

O que acontece quando somamos um polinômio com seu oposto?

Tanto o polinômio p(x,y) quanto r(x,y) representam a soma de áreas de retângulo de diferentes tamanhos, sendo possível atribuir valores numéricos às variáveis x e y e calcular a área dessas figuras, o que pode ser realizado, somando esses polinômios antes de realizarmos a substituição dos valores numéricos e que torna o cálculo numérico mais rápido. A soma de polinômios, definida como a soma e monômios iguais, pode ser geometricamente definida como a soma de áreas de mesmo tamanho.

É importante discutirmos com os alunos que não há áreas negativas, o que temos no objeto é uma figura com mesmas medidas em que a tonalidade mais clara indica uma área a ser retirada, representando monômios negativos. Quando somamos polinômios opostos, um anula o outro, ou seja, temos determinada área que é retirada.

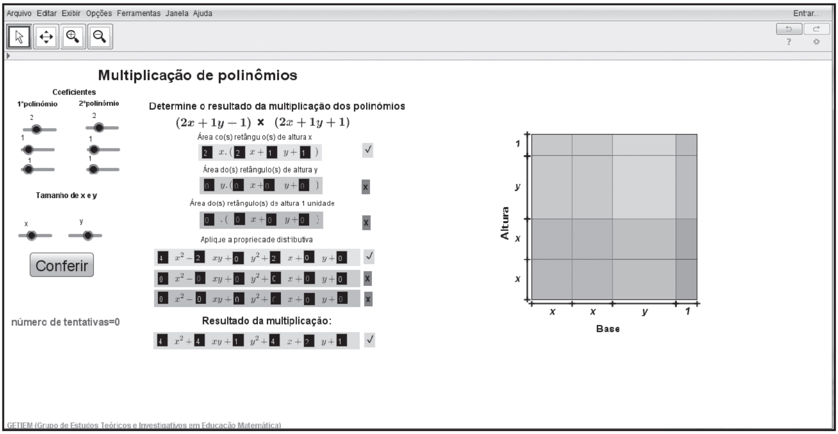
Multiplicação de polinômios

Dados dois polinômios $p(x,y) = a_2x + a_1y + a_0$ e $q(x,y) = b_2x + b_1y + b_0$, o produto pq(x,y) pode ser obtido, aplicando a propriedade distributiva e agrupando os termos semelhantes:

$$pq(x, y) = c_5x^2 + c_4xy + c_3y^2 + c_2x + c_1y + c_0,$$

$$\text{com } \{x, y\} \in R_+ \text{ e } \{a_0, a_1, a_2, b_0, b1, b_2, c_0, c1, c_2, c_3, c_4, c_5\} \in Z_+.$$

Figura 4: Multiplicação de polinômios



Fonte: Os autores

O objeto[4] (Figura 4) possibilita movimentar oito controles deslizantes que tornam o material dinâmico. Três deles controlam a quantidade de segmentos que formarão os lados verticais do retângulo que aparece na tela e outros três controles deslizantes, os lados horizontais. Assim, os lados do retângulo são compostos pela soma de segmentos, de forma que um deles terá tamanho conhecido de uma unidade de medida (coeficiente de x^0), e dois segmentos que podem variar pela manipulação de outros dois controles deslizantes, nomeados x e y, e que variam o tamanho da medida desses segmentos. Esses controles (x e y) permitem compreendermos que os lados do retângulo e consequentemente sua área podem variar tanto pela quantidade de segmentos quanto pelos tamanhos que x e y podem assumir, pois, conforme movimentamos os controles deslizantes, a área do retângulo é alterada.

É possível visualizarmos os termos da multiplicação no objeto e determinarmos o resultado da multiplicação, completando os campos de entrada. Quando os valores estão incorretos, ficam vermelhos, quando estão corretos, verdes. Quando há algum valor errado na

[4] Disponível em: http://tube.GeoGebra.org/material/simple/id/1430185.

equação, aparece no fim da expressão o marcador X, e, quando toda a equação está correta, o marcador é substituído por outro, √. O objeto de aprendizagem oferece após cinco tentativas a de visualizar a resposta correta.

A multiplicação de polinômios e as suas condições podem ser definidas, partindo de questionamentos: O que representa o produto de dois polinômios? O que representam o primeiro polinômio p(x,y) e o segundo q(x,y)? O que representam os coeficientes de cada um dos polinômios? Qual o algoritmo da multiplicação de dois polinômios? Esse algoritmo pode ser usado em qualquer multiplicação de polinômios?

Na multiplicação de polinômios aplicamos a propriedade distributiva e agrupamos os termos semelhantes. O algoritmo já está disposto no objeto, sendo necessário apenas completar valores dos coeficientes que podem assumir inclusive o valor zero. Entretanto não podem assumir valores negativos por estarem relacionado à área. Essa discussão pode ser realizada, partindo para a formalização da multiplicação de polinômios que pode ser aplicada a outras situações que não apenas áreas, admitindo valores negativos e também envolvendo mais que duas incógnitas e com grau maior que dois.

Divisão de polinômios

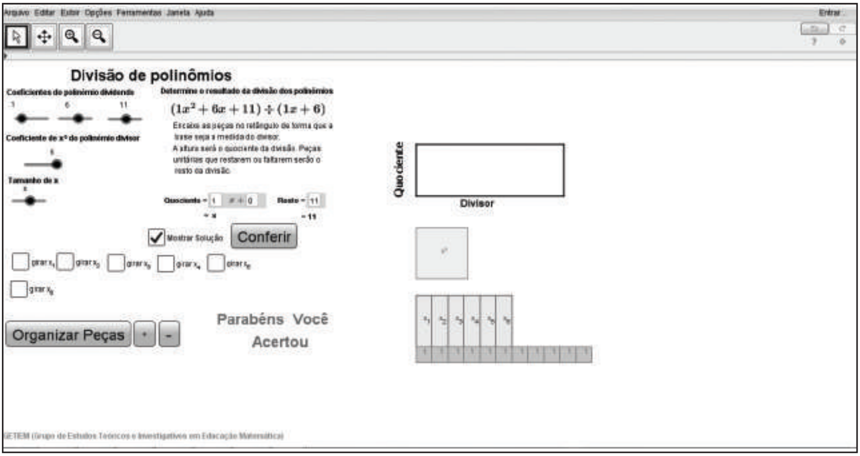
Uma vez que a proposta na divisão, assim como nas demais operações, é discutirmos a divisão de um polinômio, partindo do conceito de área, limitamos o polinômio dividendo ao grau 2, com uma incógnita pertencente ao conjuntos dos números reais positivos, definido por: $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$ *com* $\{a_2, a_1, a_0\} \in Z$,o polinômio divisor, definido por $q(x) = b_1 x^1 + b_0 x^0$ *com* $\{b_1, b_0\} \in Z$, em que o coeficiente b_1 foi fixado em um para garantir que os coeficientes do quociente sejam todos inteiros positivos, não descaracterizando os lados do retângulo. O coeficiente b foi limitado pelo quociente $\frac{a_1}{a_2}$, isto é $\{b_0 \leq \frac{a_1}{a_2}\}$, respeitando a definição da divisão de polinômios:

Dados dois polinômios p(dividendo) e $q \neq 0$(divisor), dividir p por q é determinar outros dois polinômios s (quociente) e r (resto) de modo que verifiquemos duas condições:

a) $s \,.\, q + r = p$

b) $\partial r < \partial q$ (ou $r = 0$, caso em que a divisão é exata)

Figura 5: Divisão de polinômios



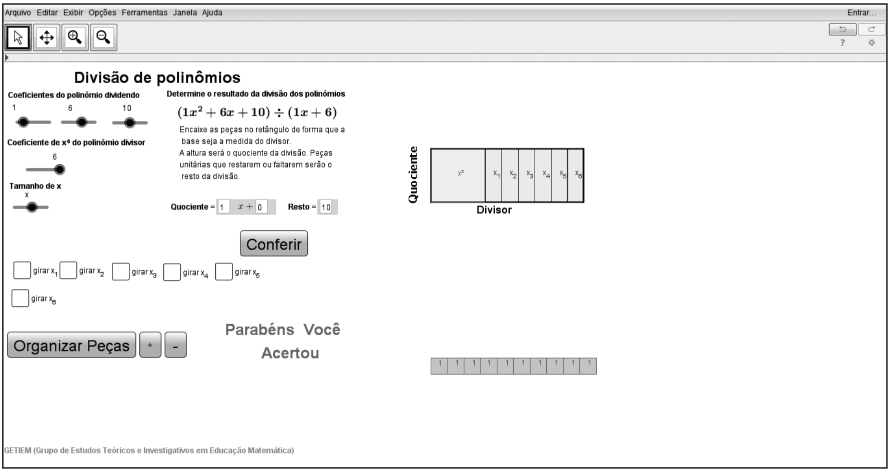
Fonte: Os autores

O objeto[5] (Figura 5), construído no GeoGebra, oferece a oportunidade de o aluno manipular retângulos para encontrar o resultado da divisão de um polinômio *p(x)* por *q(x)*. Portanto, é possível alterar valores dos três coeficientes (a_2 , a_1 , a_0) do polinômio dividendo e do coeficiente b_0 de x^0 no polinômio divisor. Após a escolha desses dois polinômios e de ter definido o tamanho que x assumirá, podemos clicar em *Organizar Peças* e nos botões + ou - para organizar a tela do GeoGebra fim de facilitar a ação seguinte, que consiste em encaixar os retângulos na caixa que aparece na tela. Para essa tarefa, em algumas situações será preciso girar os retângulos cujos lados medem x e uma unidade.

[5] Disponível em: http://tube.GeoGebra.org/material/simple/id/1225525.

Para visualizar geometricamente o resultado, o aluno precisa encaixar os retângulos na caixa de forma que um dos lados da mesma seja a medida correspondente ao quociente e o outro, a medida do divisor, e que sobrem ou não retângulos correspondentes ao resto. Caso o resto seja um valor positivo, sobrarão retângulos fora da caixa, caso contrário, se o resto for negativo, esse é visualizado nos espaços que faltam para completar a caixa (Figura 6).

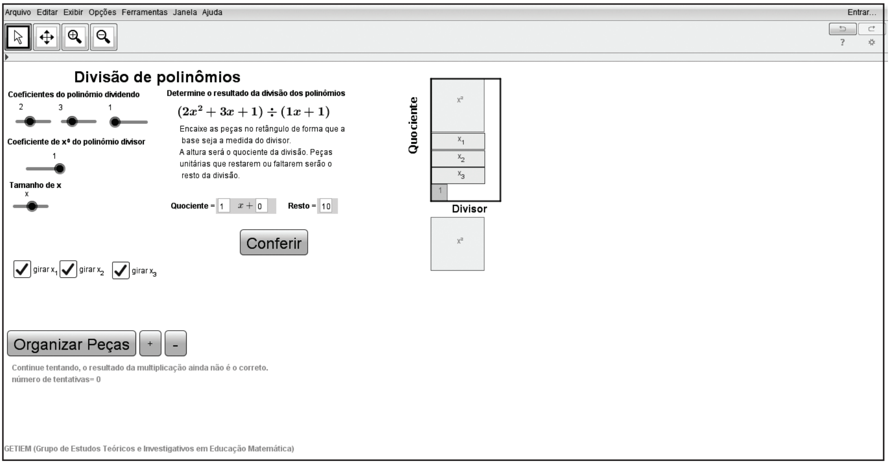
Figura 6: Resultado da divisão de polinômios



Fonte: Os autores

Nesta tarefa o papel do professor, assim como nas demais, é de mediador, pois suas interferências devem possibilitar que o aluno consiga visualizar que o total das peças correspondem ao polinômio dividendo, e que o divisor e quociente serão representados pelos lados da caixa. O quociente será representado pelo lado visualizado na vertical, e o divisor, no lado horizontal. Dependendo dos polinômios escolhidos, e da forma como encaixarem os retângulos, podem encontrar respostas diferentes da correta, se não considerarem as condições da definição de divisão de polinômios, em que o grau do polinômio do resto deve ser menor que o do polinômio dividendo.

Figura 7: Disposição das peças que não satisfazem as condições da divisão de polinômios



Fonte: Os autores

Tais situações podem ser discutidas por meio de questionamentos: Como é representado o polinômio dividendo? E o polinômio divisor e o quociente? E o resto? A forma como foram colocadas as peças obedece às condições da divisão de polinômios? O grau do resto é maior ou menor que o do polinômio divisor? De acordo com as condições da divisão de polinômio, qual a melhor forma para organizarmos as peças de forma que o resultado da divisão esteja correto?

Esperamos que tais questões possibilitem perceber que devemos iniciar a colocação das peças com as que representam maior grau do polinômio, de acordo com o algoritmo da divisão. Além disso, pode ser sugerido que se inicie, completando-se o lado do retângulo que representa o divisor.

Assim como na multiplicação de polinômios, é importante discutirmos as limitações que o objeto de aprendizagem apresenta, visto que estenão possibilita divisões de polinômios com coeficientes negativos, e os coeficientes dos polinômios, divisor e dividendo têm limitações para que o polinômio quociente pertença ao conjunto dos inteiros não negativos além de que, por estar associando a área, não temos polinômios com grau maior que dois.

Considerações finais: implicações para o ensino de matemática

Esperamos que o material contribua para o ensino da Matemática, possibilitando discutir questões abstratas da álgebra com algum sentido ao relacionar operações que envolvem monômios e polinômios à área. Acreditamos que a manipulação do material pelo aluno, mediado pela ação do professor, possa contribuir para romper barreiras que dificultam a aprendizagem dos alunos, entre as quais, a de não conseguirem compreender o significado que as "letras" assumem na Matemática. Assim, os controles deslizantes que permitem alterar o tamanho de x e y têm papel importante durante o desenvolvimento do trabalho em sala de aula, por suscitarem discussões nesse sentido.

Lembramos que o material apresenta limitações para o estudo das operações que envolvem polinômios e que não devem ser ignoradas no trabalho com os alunos, mas sim exploradas. Algumas dessas limitações devem-se ao sentido que buscamos atribuir ao estudo da Álgebra ao relacioná-la às áreas, excluindo dessa forma a possibilidade de representação de valores negativos e com polinômios com grau maior que 2.

Propomos algumas questões que podem nortear o trabalho do professor em sala de aula, mas nossa intenção é que o professor manipule os objetos de aprendizagem e,conhecendo a realidade que envolve seu trabalho, possa adaptá-los às suas necessidades. Entretanto destacamos a necessidade de oportunizar que o aluno possa manipular o material e que seja questionado sobre observações e conclusões possíveis de serem formuladas sobre o conteúdo estudado.

Referências

BANADIMAN, Adriana. Álgebra no Ensino Fundamental: Produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas. In: BÚRIGO, Elisabete Zardo; GRAVINA, Maria Alice. BASSO, Marcus Vinícius de Azevedo; GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto. **A Matemática na Escola novos conteúdos, novas abordagens.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012, p. 99-118.

BERTOLI, Vaneila; SHUMAHCHER, Elcio. Aprendendo polinômios utilizando o algeplan: uma prática no ensino da Matemática para o Ensino Fundamental. **Anais do IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática.** Canoas, 2013.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática. Paraná, 2008.

Sobre os autores

Ademir Donizeti Caldeira
Doutor em Educação-Modelagem Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Professor Associado I do Departamento de Metodologia de Ensino da Universidade Federal de São Carlos. Líder do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Cultura. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática atuando principalmente nos seguintes temas: Modelagem na Educação Matemática e Etnomatemática.
E-mail: mirocaldeira@gmail.com

Amauri Jersi Ceolim
Doutor em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Professor da Educação Básica na rede Estadual de Ensino do Estado do Paraná no período de 1987-2006. Professor assistente da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Câmpus de Campo Mourão desde 1995. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática de Campo Mourão (GEPEMCAM). Tem experiência na área de Educação Matemática, na Formação continuada de professores da Educação Básica atuando principalmente com a Modelagem na Educação Matemática.
E-mail: ajceolim@gmail.com

Clélia Maria Ignatius Nogueira
Doutora em Educação pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Atualmente é docente no Centro de Estudos Superiores de Maringá (Unicesumar). Atua na área de Educação, com pesquisas nas áreas de Educação Matemática; Educação de Surdos e em Epistemologia Genética. Autora de livros sobre ensino de matemática segundo a perspectiva da epistemologia genética e sobre o ensino de matemática para surdos. Participa

dos seguintes grupos de pesquisa (GIEPEM): Grupo Interdisciplinar de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática (UEM); GEPEGE: Grupo de Estudos e Pesquisas em Epistemologia Genética e Educação (UNESP/Marília) e GEPSEM: Grupo de Estudos e Pesquisas em Surdez e Ensino de Matemática (Unespar). Membro do GPEMCAM: Grupo de Pesquisas em Educação Matemática de Campo Mourão (Unespar); Vice-coordenadora do GT1: Educação Matemática na Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental e membro fundadora do GT13: Diferença, Inclusão e Educação Matemática da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).
E-mail: voclelia@gmail.com

Dirceu Scaldelai
Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Atualmente é professor da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Câmpus de União da Vitória. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Programação Matemática.
E-mail: dirceuscaldelai@gmail.com

Everton José Goldoni Estevam
Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Atua como professor adjunto do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Câmpus de União da Vitória. Investiga Formação de Professores que Ensinam Matemática e Educação Estatística. É Membro do (GETIEM) – Grupo de Estudos Teóricos e Investigativos em Educação Matemática (Unespar-UV) e do (Gepefopem) – Grupo de Estudo e Pesquisa sobre a Formação de Professores que ensinam Matemática (UEL).
E-mail: evertonjgestevam@gmail.com

Fábio Alexandre Borges
Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em Educação Especial, atuando principalmente com

a temática surdez. Editor da Revista Pranaense de Educação Matemática e docente da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Câmpus de Campo Mourão. Líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Surdez e Educação Matemática (GEPSEM). Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática de Campo Mourão (GEPEMCAM). Membro-fundador do GT13 da Sociedade Brasileira de Educação Matemática: Diferença, Inclusão e Educação Matemática.
E-mail: fabioborges.mga@hotmail.com

Irinéa de Lourdes Batista
Pós-doutora em Ciência, Tecnologia e Sociedade pelo Massachusetts InstituteofTechnologie (MIT). Atualmente é Professora Associada no Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina (UEL), atuando em cursos de graduação, especialização em Ensino de Física e em História e Filosofia da Ciência, e no Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* (Doutorado e Mestrado) em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM). É membro da coordenação do curso de Pós-Graduação Lato Sensu/Ensino de Física e coordena o Programa de Stricto Sensu/PECEM. É pesquisadora nas interfaces disciplinares de Física/História e Filosofia da Ciência/ Educação em Ciências e Matemática, nos seguintes temas: Formação de professores e Aprendizagem em Ciências (Física, Biologia e Química) e Matemática; História e Filosofia da Física; História e Filosofia das Ciências; Interdisciplinaridade, Complexidade, Questões de Gênero e Ensino de Ciências e Matemática.
E-mail: irinea2009@gmail.com

João Henrique Lorin
Mestre em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Atualmente é Doutorando pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) na Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Câmpus de Campo Mourão. Membro do Grupo de pesquisa em Investigações em Filosofia e História da Ciência, e Educação em Ciências e Matemática

(IFHIECEM). Membro do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática de Campo Mourão (GPEMCAM).
E-mail: jlorin@bol.com.br

Luciano Ferreira
Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Doutorando pelo Programa Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática na Universidade Estadual de Maringá (UEM). Atualmente é professor assistente da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Câmpus Campo Mourão. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática, educação e Formação de Professores. É membro do Grupo de estudos e Pesquisa em Educação Matemática de Campo Mourão (GEPEMCAM).
E-mail: luciano.mat.mga@gmail.com

Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (USP). Atua como professora associada do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Tem coordenado vários projetos de investigação financiados pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior(Capes). Investiga Formação de Professores que ensinam Matemática e práticas profissionais de professores de Matemática. Coordena o Grupo de Estudo e Pesquisa sobre a Formação de Professores que ensinam Matemática(Gepefopem). É bolsista de Produtividade em Pesquisa do (CNPq).
E-mail: marciacyrino@uel.br

Maria do Carmo de Sousa
Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Atualmente cursa pós-doutorado na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (USP) e exerce o cargo de professor adjunto na Universidade Federal de São Carlos(UFSCar). Tem experiência na área de

Educação, com ênfase em Educação Matemática. Sua área de atuação no que diz respeito ao ensino, pesquisa e extensão, envolve os seguintes temas: Formação de Professores, Educação Matemática, Educação Conceitual, História da Matemática e ensino de álgebra. É líder do Grupo de Pesquisa Formação Compartilhada de professores – Escola e Universidade (GPEFCom).
E-mail: mdcsousa@ufscar.br

Maria Ivete Basniak

Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Atualmente é professora adjunta da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Câmpus de União da Vitória. Tem experiência na área de Matemática Aplicada e Educação, atuando principalmente nos seguintes temas: educação, tecnologias, políticas educacionais, ensino da matemática, prática de professores que ensinam matemática.
E-mail: basniak2000@yahoo.com.br

Mariana Moran

Doutora em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professora Adjunta do colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Câmpus de Campo Mourão, com pesquisas na área de uso de novas tecnologias; Laboratório de Ensino de Matemática e Didática da Matemática. É membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática de Campo Mourão (GEPEMCAM).
E-mail:marianamoranbar@gmail.com

Rosa Maria Moraes Anunciato Oliveira

Pós-doutora pela Universidade do Minho (UMINHO) – Portugal, com apoio da Fundação de Amparo À Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp). Atualmente, é professora associada nível 03 da Universidade Federal de São Carlos. Coordena o grupo de pesquisa Etudos sobre a docência: teorias e práticas. Tem experiência na área de educação, com ênfase em formação de professores, atuando principalmente nos seguintes temas: formação de

professores, concepções sobre a docência, anos iniciais do ensino fundamental, narrativas e aprendizagem profissional da docência. É coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar).
e-mail: rosa@ufscar.br

Rosefran Adriano Gonçalves Cibotto
Doutor em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). É professor da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Câmpus Campo Mourão e membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEMCAM) em Campo Mourão da mesma universidade. Participante do projeto de pesquisa: Tecnologias da Informação e Comunicação nas aulas de Matemática: contribuições de diálogos entre formação inicial e continuada. Membro do conselho editorial da Revista Paranaense de Educação Matemática. Dedica-se atualmente aos temas Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC) e Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo (TPACK) –Technological Pedagogical Content Knowledge. Uso pedagógico das TIC; Ensino de Matemática; Formação de Professores; Educação Matemática; Gerações de indivíduos e escola contemporânea; Laboratório de informática.
E-mail: rosefran@gmail.com

Rui Marcos de Oliveira Barros
Doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática e Computação de São Carlos (ICMC-USP). Atualmente é Professor Associado da Universidade Estadual de Maringá e docente do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM), orientando pesquisas de Mestrado e Doutorado. Realiza pesquisas em Educação Matemática nas áreas de Recursos Midiáticos e Tecnológicos no Ensino e em Educação a Distância.
E-mail: professorrui@outlook.com

Sérgio Carrazedo Dantas

Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Professor da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Câmpus Apucarana e membro do Instituto GeoGebra de São Paulo. Atualmente é formador de professores na (Unespar) e coordena um projeto de formação de professores, intitulado Curso de GeoGebra (atualmente na 8ª edição) – comum a equipe composta por 40 professores.
E-mail: sergio@maismatematica.com.br

Talita Secorun dos Santos

Doutora em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Atualmente é professora adjunta da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Câmpus de Campo Mourão. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática, educação e Formação de Professores. É membro do Grupo de estudos e Pesquisa em Educação Matemática de Campo Mourão (GEPEMCAM).
E-mail: tsecorun@hotmail.com

Valdeni Soliani Franco

Doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática e Computação de São Carlos (ICMC-USP). Realizou estágio pós-doutoral em Évora Portugal em 2014-2015 em Educação Matemática. Professor do departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM), com pesquisas na área de formação de professores, uso de novas tecnologias, principalmente no ensino de Geometria e em Educação a Distância.
E-mail: vsfranco@gmail.com

Veridiana Rezende

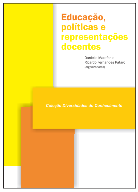
Doutora em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Docente do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Câmpus de Campo Mourão. Líder do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática de Campo Mourão (GPEMCAM). Chefe da Seção de Pesquisa do Câmpus de

Campo Mourão da (Unespar), setor responsável por coordenar a Iniciação Científica e Iniciação Científica Júnior do câmpus.
E-mail: rezendeveridiana@gmail.com

Coleção
Diversidades do Conhecimento

Formação humana: espaços e representações

Cristina Satiê de Oliveira Pátaro
Marcos Clair Bovo
(orgs.)



Educação, políticas e representações docentes

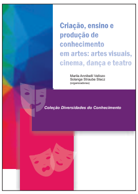
Danielle Marafon e
Ricardo Fernandes Pátaro
(orgs.)

Olhares: audiovisualidades contemporâneas brasileiras

Ana Lesnovki
Cristiane Wosniak
(orgs.)

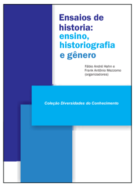
Geografia, espaço e sociedade: uma análise plural

Ana Paula Colavite,
Eloisa Silva de Paula Parolin e
Nair Gloria Massoquim
(orgs.)



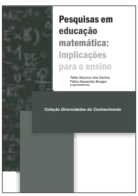
Criação, Ensino e produção de conhecimento em artes visuais, cinema, dança e teatro

Maria Annibelli Vellozo
Solange Straube Stecz
(orgs.)



Ensaios de história: ensino, historiografia e gênero

Fábio André Hahn
Frank Antônio Mezzomo
(orgs.)



Pesquisas em educação matemática: implicações para o ensino

Talita Secorun dos Santos
Fábio Alexandre Borges
(orgs.)

Sociedade e Desenvolvimento: diálogos interdisciplinares

Edcleia Aparecida Basso
Maria Izabel Rodrigues Tognato
(orgs.)